Matematik och universums innersta struktur

Joakim Arnlind
Professor i matematik

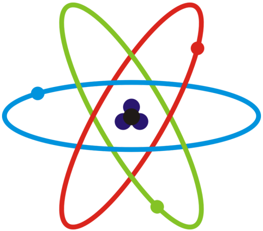
Vetenskapsdagen
LiU, 2022-10-06

Relativitetsteori

Einsteins relativitetsteori beskriver gravitationskraften, som ger oss hur massa och energi påverkar rum-tidens struktur och krökning.

Vi kan använda denna teori för att på ett mycket tillförlitligt sätt beräkna planeters banor, ljusets färd genom universum, och är en nödvändig ingrediens för dagens GPS-system. Stora saker!

Kvantmekanik



Kvantmekanik är en teori som beskriver hur de allra minsta partiklarna (elektroner, fotoner, kvarkar, etc) växelverkar.

Teorin är extremt precis när det gäller att beräkna resultatet av ett experiment där partiklar växelverkar. Små saker!

Kvantgravitation – båda två!

Ett problem som har gäckat fysiker från och med kvantmekanikens och den allmänna relativitetsteorins intåg (runt 1920-1930) är hur dessa ska kunna förenas.

I "vanliga" fall är det antingen kvantmekanik (för mycket små saker) eller gravitation (för mycket stora saker) var för sig som används för att beskriva naturen. Men vid höga energier eller mycket små avstånd så kan man inte borste från någon av dem.

Vad många fysiker tror är att vi måste radikalt ändra vår uppfattning om rummets struktur för att förena dessa två teorier. Vår "vanliga" geometri måste kanske ersättas av

Icke-kommutativ geometri

Hur små saker kan vi mäta?

När vi försöker undersöka mindre och mindre avstånd i naturen så måste vi använda oss av mer och mer avancerade metoder. Finns det någon gräns för hur små saker vi kan mäta?

För att undersöka något mycket litet i ett experiment kan man skicka dit ljus som får växelverka, och sedan mäter man resultatet. För att upptäcka något av en viss storlek, måste ljuset ha tillräckligt kort våglängd för att kunna "känna av" att det finns något där.

Hur små saker kan vi mäta?

Ju kortare våglängd en foton har, desto mer energi har den:

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Alltså, när avstånden blir riktigt små så måste fotonen ha väldigt hög energi för att kunna mäta detta avstånd.

Vid en viss längd (ca 1.6×10^{-35} m = Planck-längden) så är energin (eller massan) hos fotonen så hög att den skapar ett svart hål. Alltså finns det inte ens en teoretisk möjlighet att mäta sådana små avstånd, än mindre "se" dom.

Hur liten är Planck-längden?

Tänk dig att du tar en liten punkt, knappt synlig för det mänskliga ögat, och förstorar upp den till samma storlek som vårt observerbara universum. I detta universum kommer Planck-längden ungefär ha samma storlek som en liten punkt.

Hur ser då världen ut?

Om vi inte har några möjligheter att "se" eller "mäta" avstånd av storleksordningen 10^{-35} m, varför skulle då vår vanliga uppfattning om världen och hur den är beskaffad också gälla där?

I och med kvantmekanikens intåg, så har vi redan vant oss vid att små partiklar inte beter sig likadant som större föremål. T ex kan en partikel gå genom två olika hål "samtidigt", då objekt uppför sig som både vågor och partiklar. Vi kan heller inte prata om exakt var en partikel befinner sig.

Det finns således en möjlighet att utforska och (teoretiskt) experimentera med rummets struktur. Det kan till och med hjälpa till att finna lösningar på vissa fundamentala fysikaliska frågeställningar. T ex:

Icke-kommutativ geometri

Icke-kommutativ geometri?

Som matematiker är mitt mål inte att försöka beskriva världen och hitta rätt fysikaliska teorier. Däremot visar sig "icke-kommutativ geometri" vara ett mycket intressant matematiskt område, vilket det finns fler anledningar att studera (förutom den fysikaliska jag redan nämnt).

Vad är då icke-kommutativ geometri?

Kommutativitet

Vi multiplikation av (reella eller komplexa) tal behöver man inte fundera på i vilken ordning multiplikationen görs. Vi vet att

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \quad \text{och} \quad 5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot 5.$$

Inom matematiken säger man att

Multiplikation av tal är kommutativ.

Ordet "kommutativ" kommer från latinets "commutare" som betyder "byta plats/ordning på". Alltså, vid multiplikation av tal kan vi byta plats på talen utan att resultatet ändrar sig.

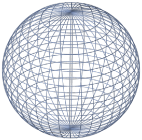
Kommutativ geometri

Vår vanliga geometri, där vi adderar och multiplicerar tal som representerar geometriska storheter, skulle alltså kunna kallas en *kommutativ geometri* eftersom de objekt som ingår, dvs tal, har en kommutativ multiplikation.

Till exempel kan vi tänka oss ytan av ett klot (en sfär) med radien 1 beskriven av alla punkter (x, y, z) i rummet sådana att

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Här är alltså x, y, z tal sådana att summan av deras kvadrater är 1.



Men om multiplikation av tal är kommutativ, hur kan det då finnas någon "icke-kommutativ" geometri? Tricket är att byta ut "tal" mot något annat, och "multiplikation" mot en operation mellan dessa objekt.

Multiplikation av operationer

Vad är då detta "något annat"?

Låt oss betrakta operatorer, eller vad vi kanske skulle kalla "operationer". T ex: vända sig om, sätta på sig en sko, sätta sig ned, osv. Kan vi "multiplicera" dessa på något naturligt sätt?

Vi låter multiplikation av operationer betyda **sammansättning av operationerna**. Låt

$$O_1 = \text{"vända sig till höger"}$$
$$O_2 = \text{"gå en meter framåt"}$$

Sedan låter vi $O_1 \cdot O_2$ betyda sammansättningen: Först "gå en meter framåt" (O_2) och sedan "vända sig till höger" (O_1) (vi läser av tradition från höger till vänster).
Multiplikationen/Sammansättningen är alltså en ny operation

$$O_1 \cdot O_2 = \text{"gå en meter framåt och sedan vända dig till höger"}$$

Multiplikation av operationer är ej kommutativt

Låt oss ta ett till exempel:

$$O_1 = \text{"ta på sko"}$$
$$O_2 = \text{"ta på strumpa"}$$

$O_1 \cdot O_2 =$  $\cdot$  $=$ 

$O_2 \cdot O_1 =$  $\cdot$  $=$ 

Vi noterar att $O_1 \cdot O_2 \neq O_2 \cdot O_1$!

Rotationer i 3D kommuterar inte

Låt oss ta ett till exempel där vi kan hitta operationer som inte kommuterar.

$$O_1 = \text{Rotation } 90^\circ \text{ kring z-axeln}$$
$$O_2 = \text{Rotation } 90^\circ \text{ kring x-axeln}$$
$$O_1 \cdot O_2 \neq O_2 \cdot O_1$$

Icke-kommutativ geometri

För ett tal a vet vi att $a \cdot 1 = a$. För operationer kan vi också hitta "1":

$$\mathbb{1} = \text{"gör ingenting"}$$

Vi ser att $O \cdot \mathbb{1} = O$ för alla operationer O. Att sammansätta "göra ingenting" med en operation, ger förstås samma operation igen.

Kan man nu tänka sig en "geometri" där tal (med vanlig multiplikation) har ersatts av operationer (med sammansättning som multiplikation)?

Tänk på sfären: alla punkter (x, y, z) sådana att $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Kan man tänka sig en *icke-kommutativ sfär* genom att studera alla operationer O_1, O_2, O_3 som uppfyller:

$$O_1 \cdot O_1 + O_2 \cdot O_2 + O_3 \cdot O_3 = \mathbb{1}?$$

(Notera att uttrycket ovan även innehåller *addition* av operatorer, som vi inte har definierat. Tänk t ex på rotationer och summor av vektorer.)

Matriser (för er som sett dem förut)

De av er som har läst matematik på universitetet har troligen kommit i kontakt med matriser.

$$O_1 + O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$O_1 \cdot O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 19 \end{pmatrix}$$

$$O_2 \cdot O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$$

$$O_1 \cdot O_2 \neq O_2 \cdot O_1 \qquad\qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriser är ett exempel på den typ av objekt vi byter ut tal mot i icke-kommutativ geometri.

En icke-kommutativ sfär

Låt oss ta följande tre matriser:

$$X = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi kan enkelt räkna ut att

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

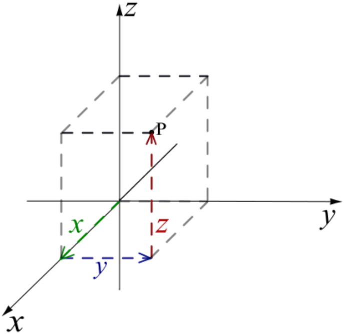
Vi kan tänka på detta som en "icke-kommutativ sfär". Jämför med

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Operationer och kvantmekanik

Det är faktiskt inte lika onaturligt som man tror att studera operationer på detta sätt.

Tänk på en partikel och vilken plats den befinner sig på i rummet, givet av koordinaterna x, y, z längs de tre axlarna.



Istället för att tänka på x som ett *tal* som talar om hur långt bort på x-axeln partikeln finner sig, så tänker man på x som en *operation* som "mäter partikelns x-koordinat".

Operationer och kvantmekanik

Det är välkänt sedan länge i kvantmekaniken att det faktiskt ibland spelar roll i vilken ordning man mäter saker. T ex så får man i allmänhet olika svar om man först mäter en partikels hastighet och sedan dess position, eller om man gör tvärt om. Detta ger *Heisenbergs osäkerhetsrelation.*

Detta bekräftas av otaliga experiment.

Nu antar vi att samma sak gäller för mätning av partikelns x, y och z koordinat. Alltså, operationerna som motsvarar mätning av dessa koordinater **kommuterar ej**.

Icke-kommutativ geometri

I min forskning studerar jag hur sådana "algebror" av operationer (med en multiplikation som ej är kommutativ) uppkommer och hur man kan försöka förstå klassiska geometriska storheter såsom area, volym, krökning och topologi.

Det handlar dels om att förstå hur, eller om, man kan införa begrepp vi känner igen från den vanliga geometrin, i dessa algebror. Dels handlar det om att försöka visa matematiska påståenden om hur dessa är relaterade till varandra.

Icke-kommutativ geometri hjälper också till med att förstå saker som inte kommer från fysiken. Det finns vissa matematiska geometriska objekt som är så pass konstiga (men inte ovanliga) att man inte kommer någonvart om man försöker studera dem med vanlig geometri. Däremot kan icke-kommutativ geometri avslöja strukturen hos dessa objekt.

Några avslutande ord

- Fysiker kämpar med att försöka förena relativitetsteori med kvantmekanik, som ger en teori för kvantgravitation.
- Då man försöker mäta mindre och mindre avstånd uppstår problem, eftersom fotoner kommer att ha så hög energi att de bildar svarta hål.
- Alltså, det är inte meningsfullt att försöka förstå rummets struktur på så små avstånd med hjälp av vår "vanliga" erfarenhet av världen.
- Många fysiker tror att rummet blir "icke-kommutativt" vid små avstånd.
- Detta har krävt att vi utvecklar ny matematik för att försöka förstå vad geometri betyder på ett rum som inte är kommutativt.
- Icke-kommutativ geometri är definitivt inte bara intressant med avseende på denna tillämpning inom fysik, utan har även sin plats inom matematiken, för att t ex studera "konstiga" geometriska objekt.

Tack!