Graffärgningar och skolscheman utan håltimmar

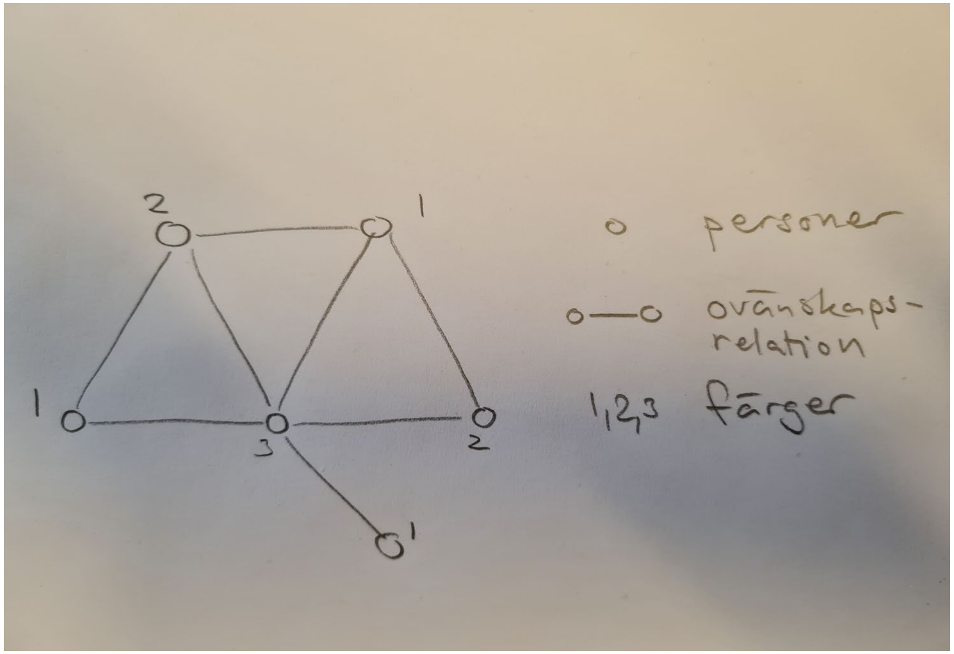
Carl Johan Casselgren

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel: Bjuda alla sina vänner på middag.

Problem: En del av ens vänner gillar inte varandra. Hur många middagskvällar behövs?

Lösning: Graffärgning!

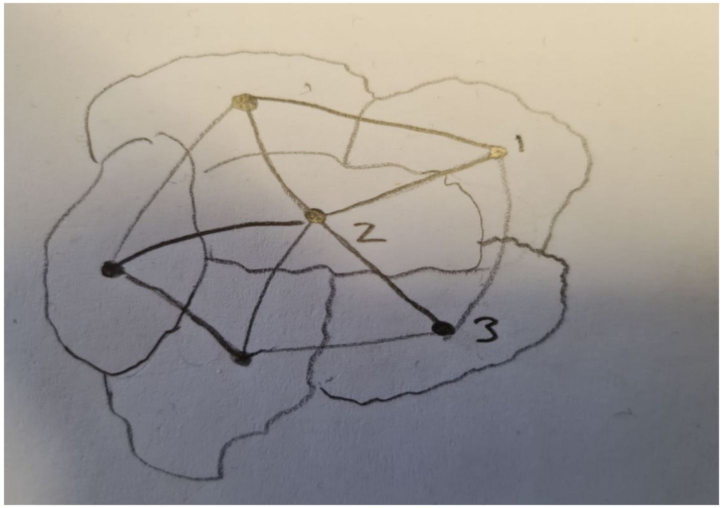


Graffärgning – partition av hörnmängden f: V(G) → {1,2,3,...}.

Vill använda så få färger som möjligt.

Tillämpningar: schemaläggnings-problem, matchnings- och tilldelningsproblem

- 1852 F. Guthrie. Färglägga kartor över counties i England. Angränsande regioner får olika färger. Fyra färger verkar räcka…



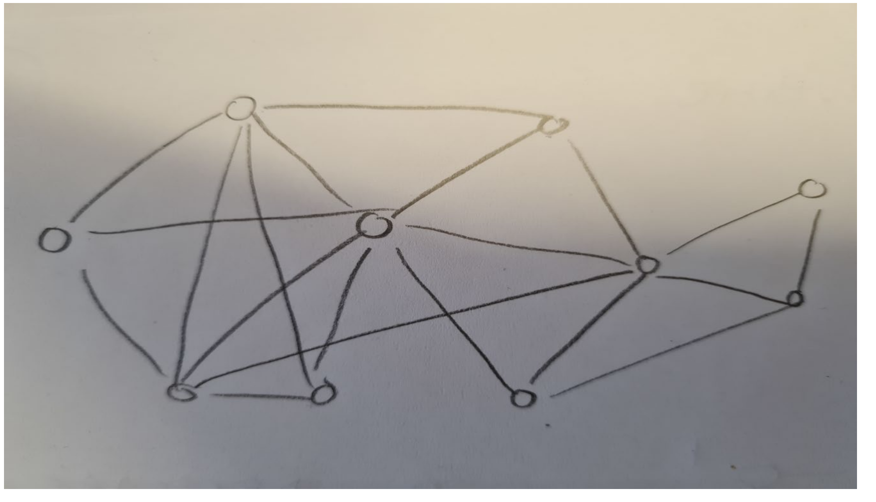
- Planär graf: graf där kanterna bara möts vid dess ändpunkter
- 4CP: Varje planär graf kan färgas med 4 färger.

Fyrfärgsproblemet

- F. Guthrie 1852.
- Matematikern de Morgan spred problemet till matematiker i London.
- Flera ”bevis” som senare visade sig vara felaktiga, t.ex. ett av Kempe 1879.
- 1890 Heawood 5-färgssatsen.
- 1976 Appel-Haken 4CT. Bevis m.h.a. datorer.

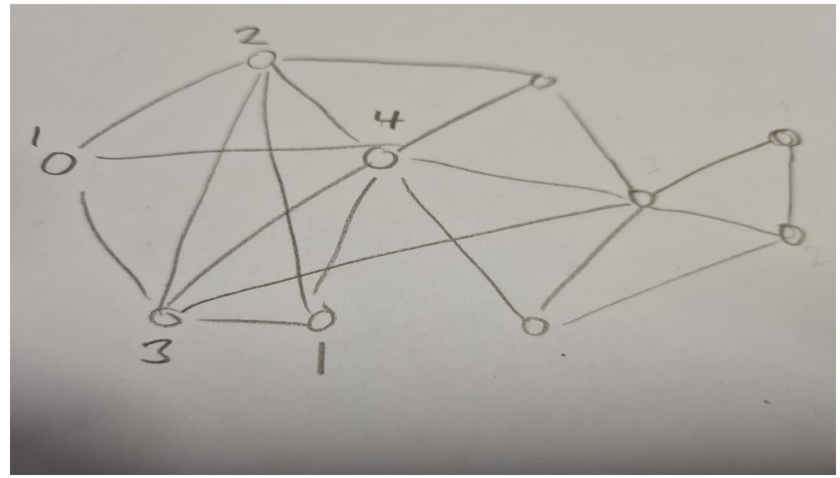
Graffärgning – allmänna grafer

- För en allmän graf G: problemet att bestämma det minsta antalet färger som krävs för en färgning är svårt.
- Ingen känd effektiv algoritm för att lösa problemet existerar. Problemet är dessutom NP-komplett.
- $\Delta(G)$ =Största antalet kanter som möts vid ett och samma hörn i G.
- Minsta antalet färger $\leq \Delta(G) + 1$



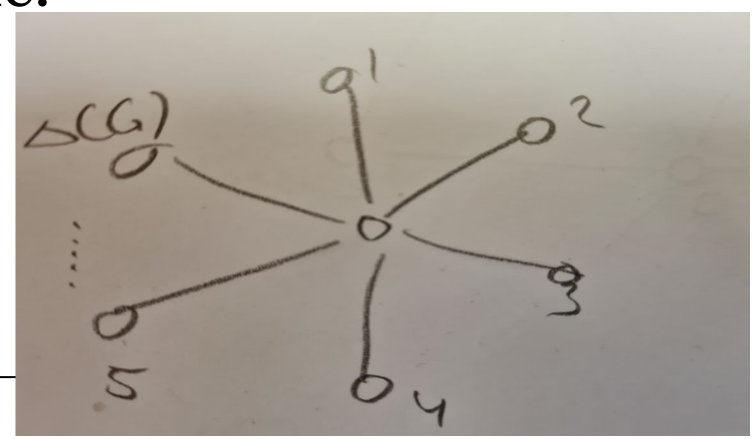
Minsta antalet färger ≤ Δ(G) +1

- Vi färgar grafen ”girigt”:
- Gå igenom alla hörn succesivt enligt någon förut-bestämd ordning, och tilldela varje hörn den minsta färg som ej finns hos någon granne.

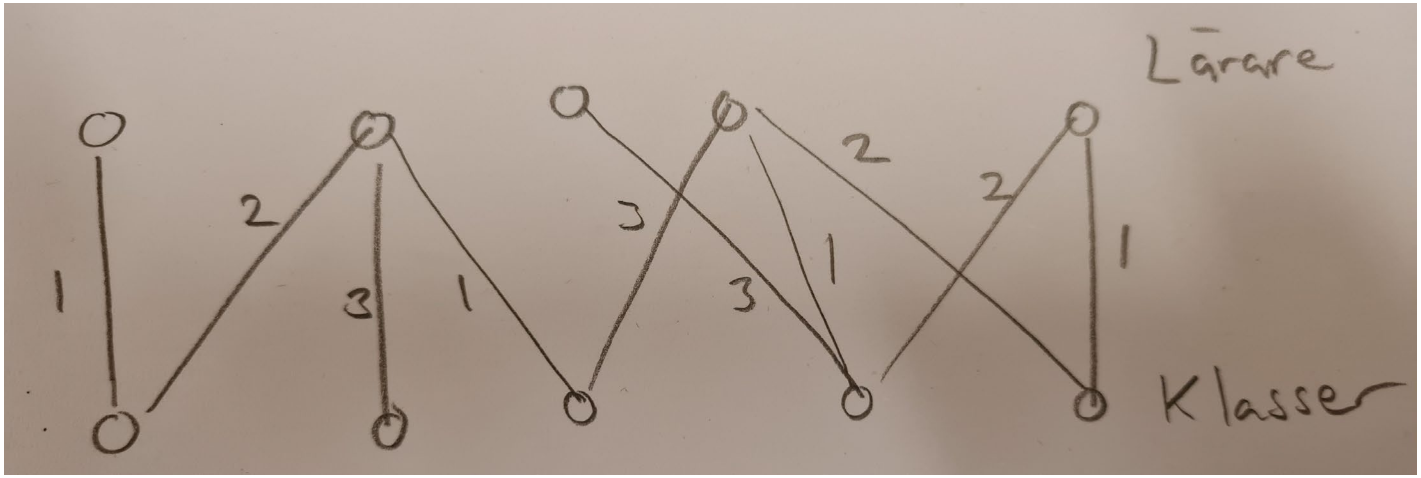


Maximalt antal grannar är Δ(G).

- Alltså: Δ(G)+1 räcker alltid för en färgning.



Skolscheman och bipartita grafer

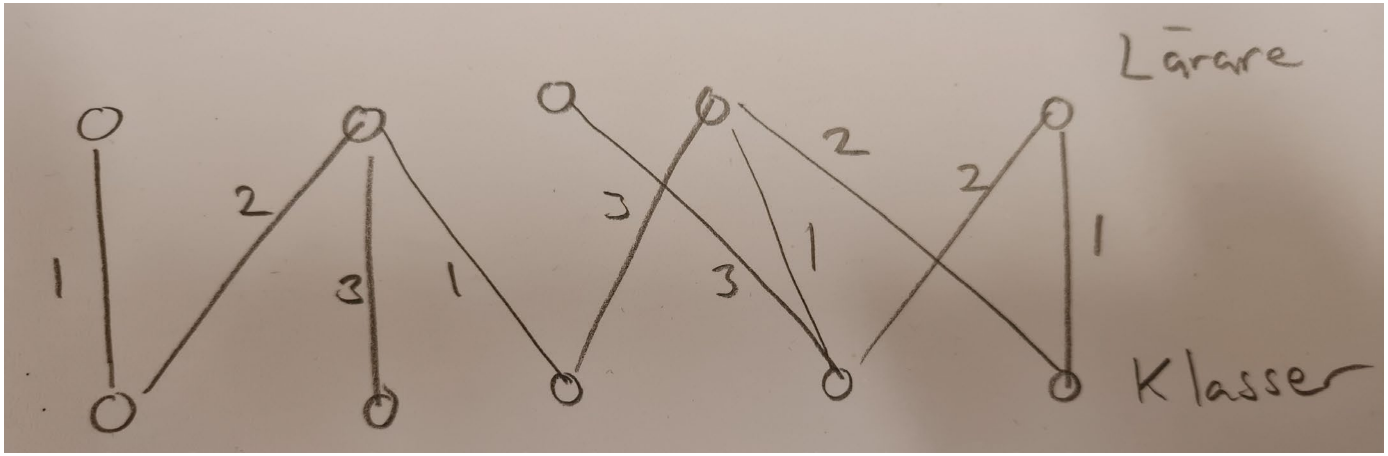


Kantfärgning av en bipartit graf.

Färger = tidsperioder

1. 8-9
2. 9-10
3. 10-11

Kantfärgning av bipartita grafer



För denna typ av modell finns effektiva algoritmer för att lösa problemet.

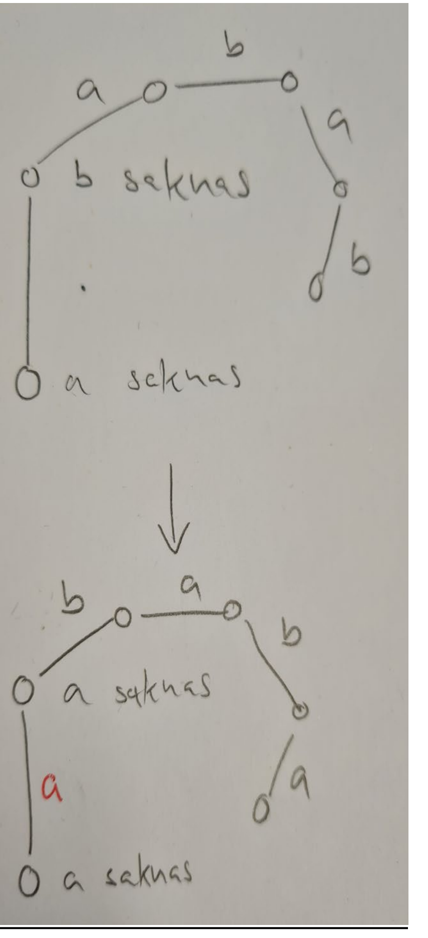
Königs sats: Minsta antalet färger som behövs för en kantfärgning är $\Delta(G)$.

Königs sats

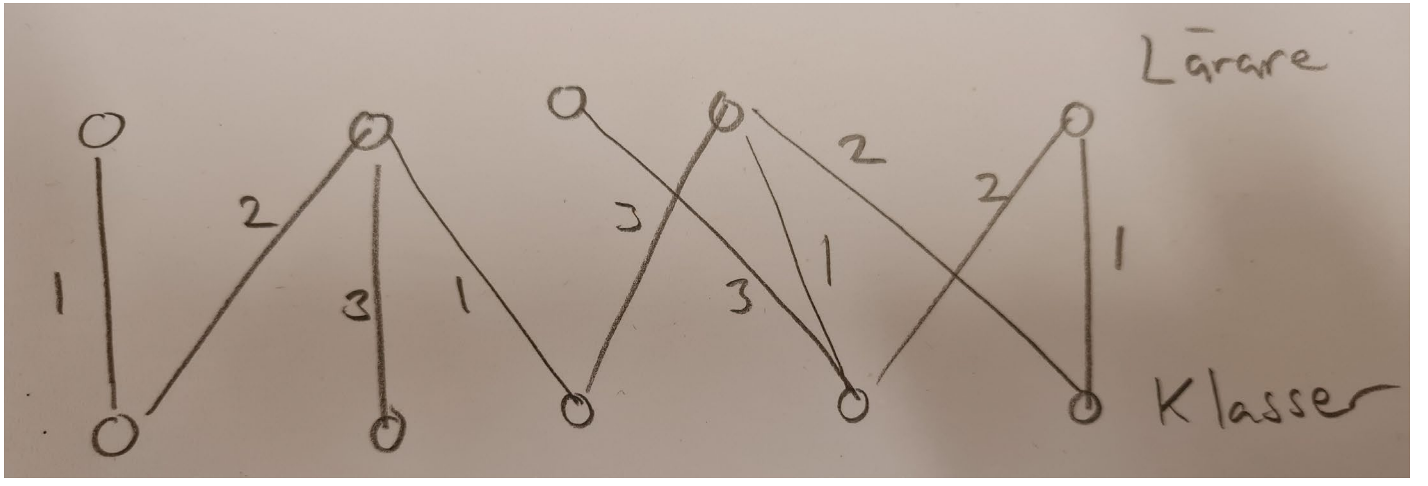
Königs sats: Minsta antalet färger som behövs för en kantfärgning är $\Delta(G)$.

Bevisidé:

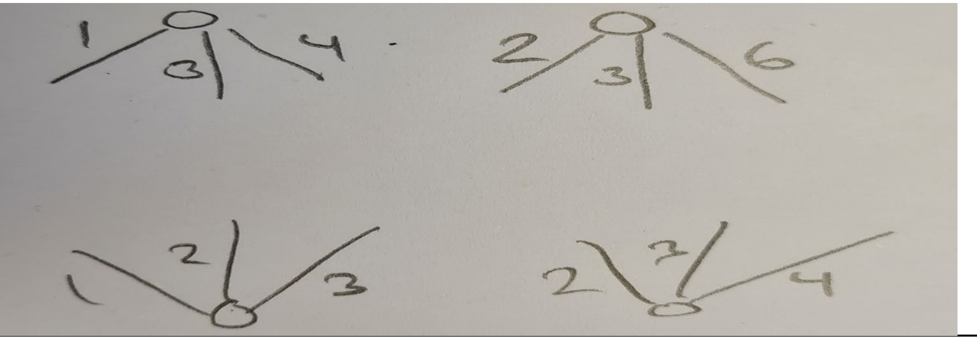
Antag att vi har färgat några kanter i en bipartit graf och betraktar den hittills ofärgade kanten e=uv. Då finns någon färg a som ej finns vid v och någon färg b som ej finns vid u. Om a=b, så OK. Annars betrakta delgraf som i figuren.



- Königs sats ger alltså en effektiv metod för att hitta skolscheman.
- Problem: Klasser (eller lärare) kan få håltimmar!



- Lösning: (Enkelsidig) Intervalkantfärgning



Intervallkantfärgningar

- Introducerades 1987 av

Asratian-Kamalian.

- $\Delta(G) \leq 3$: OK! (Hansen 1992)
- $\Delta(G) = 4$: ???

Enkelsidig IKF: Går alltid att åstad-komma genom att ta en ny färg för varje kant. Vi vill använda så få färger som möjligt.

$\Delta(G) \leq 4$: 6 färger räcker (skarp gräns)

$\Delta(G) \leq 5$: 15 färger räcker (≥ 7)

$\Delta(G) \leq 6$: 33 färger räcker (≥ 8)

Slutsats: Bra med få lektioner varje dag!