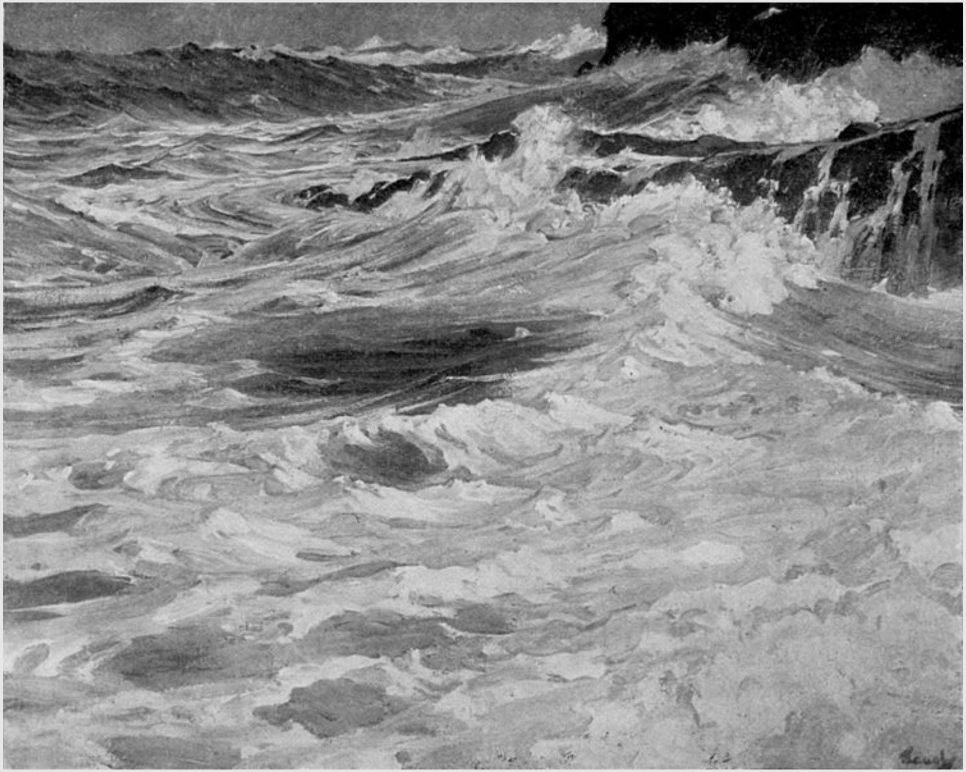
Solitära vågor och matematiska mirakel

Hans Lundmark

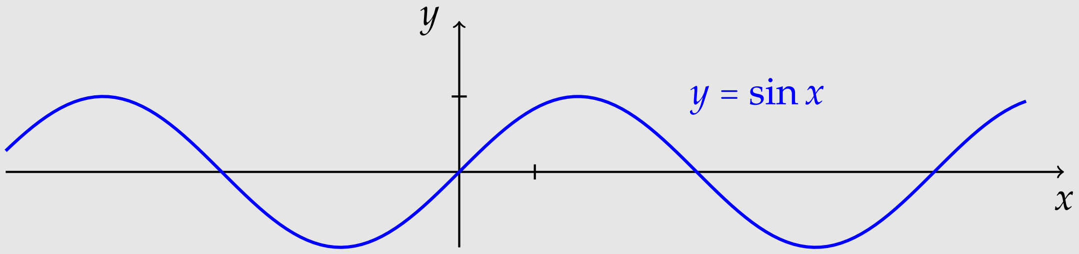
En våg kommer sällan ensam…?



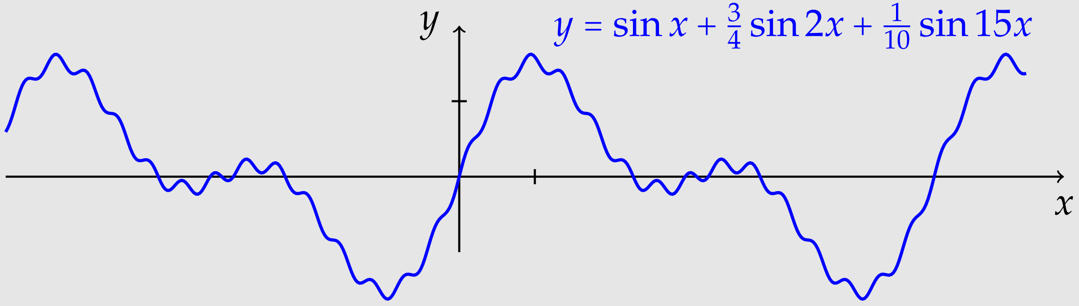
(Alla foton: Wikimedia Commons.)

Många vågor är **periodiska** svängningar.

Sinusvåg (harmonisk svängning):



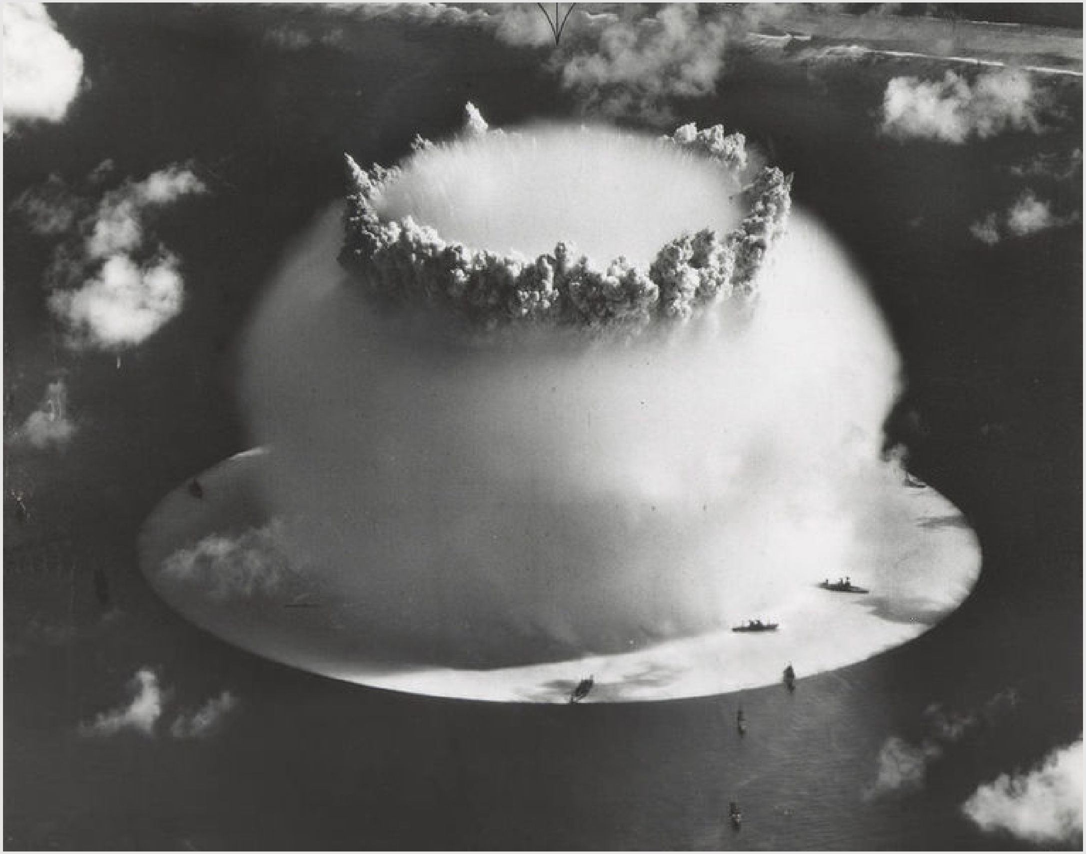
Grundton & övertoner:



Men vissa vågor kommer ensamma.

T.ex. en tidvattenvåg:

Eller en chockvåg från en explosion:



Eller när publiken ”gör vågen” på en arena:

John Scott Russell (1808–82)

Ingenjör och skeppsbyggare från Skottland.

Gjorde berömd observation 1834 vid Union Canal nära Edinburgh.

I believe I shall best describe this phænomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phænomenon which I have called the Wave of Translation [. . .].

J. Scott Russell, *Report on waves* (1845)

Russells experiment i vattentank:

- Solitära vattenvågor är mycket stabila.
- Högre vågor färdas fortare.
- Om man försöker skapa en alltför hög våg så splittras den i flera solitära vågor av olika höjd.

Kunde ej förklaras med dåtidens vattenvågsteori.

Matematisk bakgrund

- **Derivata** = ögonblicklig förändringstakt
- Hastighet
  = derivata av position (med avseende på tid)
- Acceleration
  = derivata av hastighet
  = andraderivata av position
- **Differentialekvation** = samband mellan en sökt funktion och dess derivator.

- **Naturlagar** (eller matematiska modeller i allmänhet) är ofta formulerade som differentialekvationer.
- T.ex. **Isaac Newton** (1642–1727):

$$\text{kraft} = \text{massa} \times \text{acceleration}.$$

- Man sökte **exakta lösningsformler**.
- **Tvåkropparsproblemet** löstes av Newton själv.

- **Trekropparsproblemet** gäckade alla försök.
- **Henri Poincaré** (1854–1912) insåg att det inte går. Lösningarna är för komplicerade för att beskrivas av formler vi kan skriva upp.
- Sökande efter exakta lösningar ”dött ämne”.

  Istället: studera diff-ekvationer **kvalitativt**.

  (Lösningars existens och entydighet. Dynamiska system. Kaosteori. Etc.)

Åter till **Russells solitära våg**.

Teoretisk förklaring: **Korteweg** & **de Vries** 1895.
(Och delvis av andra lite tidigare.)

Diverse förenklande antaganden:

- grunt vatten (i förhållande till våglängden)
- vågutbredning bara i en riktning
(t.ex. längs en kanal)
- försumma ytspänning, viskositet, vind, etc.
- med mera…

Leder till **KdV-ekvationen**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

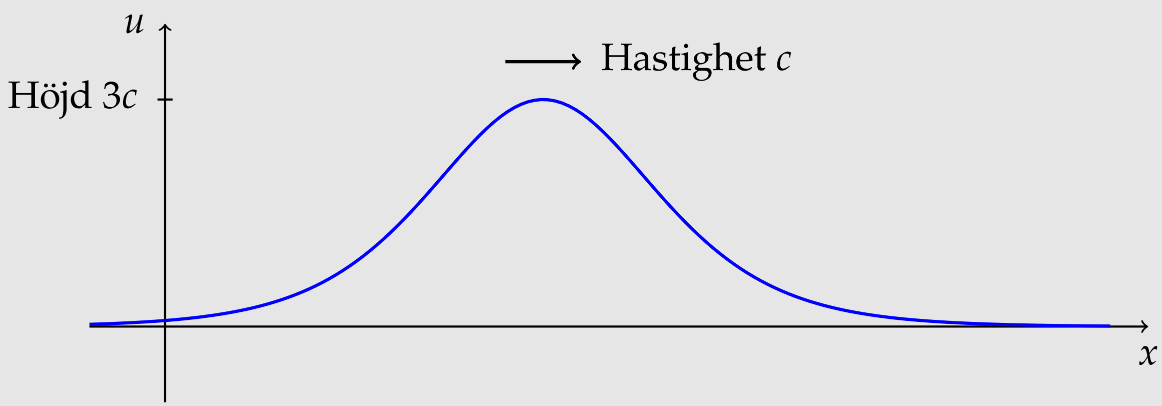
Alternativt skrivsätt:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

- Funktionen $u(x,t)$ sökes (vågens form).
- Ickelinjär PDE (partiell differentialekvation).
- Verkar hopplöst att fullständigt lösa exakt.

Men man kan rätt lätt hitta *en* lösning åtminstone, en **fortskridande solitär våg**:

$$u(x,t) = 3c \Big/ \cosh^2\!\Big(\tfrac{1}{2}(x - ct)\sqrt{c}\Big)$$



Sensationella upptäckter på 1960-talet!

- Oväntade resultat vid numerisk simulering av KdV-ekvationen på dator. ”**Solitoner**”.

  (Zabusky & Kruskal 1965)

- **Inversa spridningstransformen**, metod som ger exakta lösningsformler för n-solitonlösningar.

  (Mirakel, nästan för bra för att vara sant!)

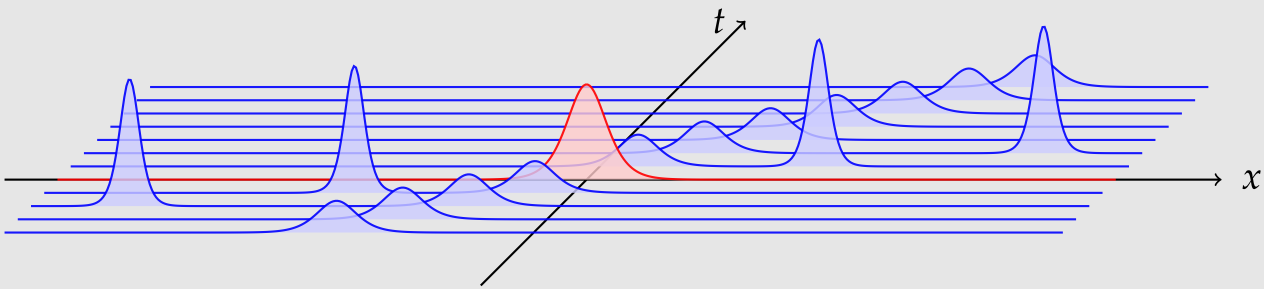
  (Gardner, Greene, Kruskal, Miura 1967)

- **Integrabla system**, nytt forskningsområde.

  (Eller möjligen nygammalt.)

Exempel på tvåsolitonlösning till KdV-ekvationen:

$$u(x,t) = \frac{72\left[3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)\right]}{\left[3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\right]^2}$$



Forskning om integrabla system på MAI

- Integrabla ekvationer av **Newtontyp**:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = F(q).$$

Partikel i $\mathbf{R}^n$ med position

$$q(t) = \big(q_1(t), \ldots, q_n(t)\big)$$

som rör sig i ett kraftfält

$$F(t) = \big(F_1(q), \ldots, F_n(q)\big).$$

Lösning via separation av variabler.

- Exakta formler för **spetsiga solitoner**.
  (Eng. *peakons*, peaked solitons.)

  Först studerade i Camassa–Holm-ekvationen, en annan modell för vågor i grunt vatten:

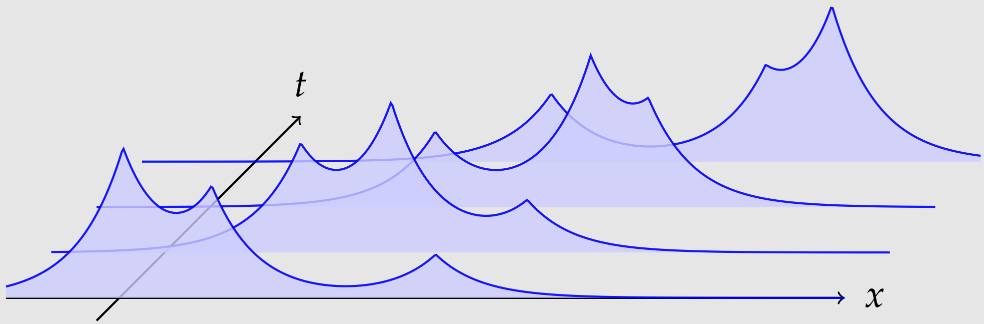
  $$u_t + m_x u + 2m u_x = 0, \quad m = u - u_{xx}.$$

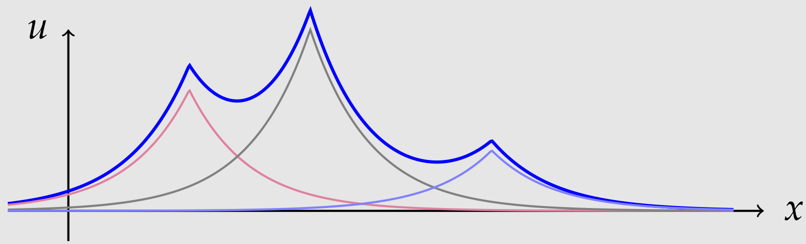
  (Camassa & Holm 1993)

  Förekommer även i vissa andra matematiskt besläktade ekvationer.

  (Själva *ekvationerna* ser värre ut än KdV, men å andra sidan har *lösningarna* enklare struktur.)

Exempel på trepeakonlösning till CH-ekvationen:





Exakta lösningsformler för n-peakonlösningar fås via **inverst spektral-problem** för **diskret sträng**. (Kedjebråk, ortogonala polynom, etc.)

(Beals, Sattinger & Szmigielski 1999)

Sugen på att leka med solitoner hemma?

Testa ”bollar-i-lådor-systemet”:

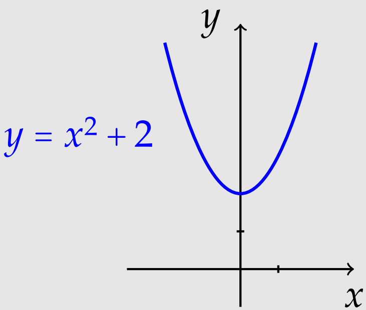
```
t=0 ..000000.......0000.......000.....................................
t=1 ........000000.....0000......000..................................
t=2 ..............00000....00000....000...............................
t=3 ...................0000.....0000...00000..........................
t=4 .......................0000.....000.....000000....................
t=5 ...........................0000....000........000000..............
t=6 ...............................0000...000...........000000........
t=7 ...................................000...0000.............000000..
```

(Takahashi & Satsuma 1990)

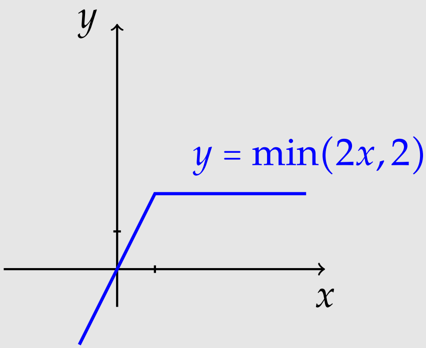
(Ett ”ultradiskret” integrabelt system.)

- Finns i olika varianter, t.ex. med ändligt många lådor i en ring, så att vågorna går runt.
- Studeras med hjälp av bl.a. ”tropisk geometri”. (Byt **gånger** & **plus** mot **plus** & **minimum**.)

T.ex. $y = x \cdot x + 2$ blir $y = \min(x + x, 2)$.



Andragradare i vanlig geometri…



…och i tropisk geometri