Vetenskapsdagen 2016

SciLab för laborativa inslag i matematik eller fysik

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Fredrik Berntsson (`fredrik.berntsson@liu.se`)

Bakgrund och Syfte

Inom kursen *Fysik3* finns material som leder till lite svårare problem där datorhjälpmedel kan öka förståelsen. Vi ville lära eleverna att använda ett sådant program för att simulera ett fysikaliskt system och dra slutsatser från resultaten.

Utveckling av tre Föreläsningar och två Datorövningar där eleverna får lära sig tillräckligt för att kunna genomföra en någorlunda komplicerad simulering.

Samarbete med Berzeliusskolan i Linköping.

Innehåll

- *SciLab* - Ett programpaket för vetenskapliga beräkningar.
- *Kursplan* - Fö 1, Fö 2, och Dator 1. SciLab introduktion. Programmering.
- *Kursplan* - Fö 3 och Dator 2. Begynnelsevärdesproblem. Simulering.
- *Avslutning*

SciLab

SciLab är ett interaktivt programsystem för tekniska beräkningar.

- Väldigt likt Matlab. Bra dokumentation.
- Saknar en hel del tillämpningspaket, som Simulink, men annars finns det mesta.
- Gratis från `www.scilab.org`.

Exempel SciLab kan användas som miniräknare

```
-->x=4.5;y=3.7;
-->z=sin(x+3*y)/(1+x^2)
   z  =
      0.0050708
```

De flesta standard funktioner som `log`, `exp`, `tan`,..., finns tillgängliga.

Exempel Lös ekvationssystemet $Ax = b$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2.2 & -1.4 \\ 1.7 & -3.1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 2.3 \end{pmatrix}.$$

I SciLab skriver vi

```
--> A = [ 2.2 -1.4 ; 1.7 -3.1 ];
--> b = [1.4 ; 2.3 ];
--> x= A\b;
```

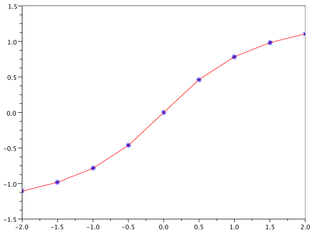
Vi får att $x = (\,0.552 \quad -0.606\,)^T$.

Det finns ett stort antal funktioner för att utföra beräkningar med matriser eller vektorer.

Exempel Rita en graf över funktionen $y = \arctan(x)$ för $-2 < x < 2$.

I SciLab skriver vi:

```
--> x = -2:0.5:2;
--> y = atan(x);
--> plot( x,y,'b*',x,y,'r-');
```



För att få en "jämnare" kurva måste vi välja fler punkter (x_k, y_k).

SciLab innehåller ett komplett programspråk. En bra editor finns tillgänglig.

Exempel Då ett antal rader skall upprepas ett fixt antal gånger används en `for` sats. Utnyttja en sådan för att beräkna summan

$$S = \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2}.$$

I SciLab skriver vi:

```
S=0;
for k=1:1000
   S=S+k^(-2);
end
```

Detta ger `S=1.6439`.

Kursinnehåll

Föreläsning 1 $2 \times 45\,minuter$

- Introduktion: Varför vill man simulera fysikaliska system?
- SciLab: Variabler, Matriser, Villkors- och Repetitionssatser, Grafer i $2D$.

Föreläsning 2 $1 \times 45\,minuter$

- SciLab: Kommandofiler och funktioner. Ett exempel från sannolikhetsläran.

Datorövning 1 $1 \times 45\,minuter$ och ungefär 1 *timme* hemarbete.

- SciLab: Både enkla och svårare programmeringsuppgifter.

Lite med än vad som krävs för att lösa simuleringsuppgiften.

Datorövning 1

Uppgift 6.1 Vad blir `x(5)` då följande program exekveras?

```
x=zeros(5,1);
for k=2:5
   x(k)=x(k-1)+k;
end
```

Uppgift 6.3 Antag att en vektor x är given. Använd en `for`-sats för att hitta det största elementet i vektorn x.

Uppgift 7.2 Skriv en funktion `Maximum` som tar en vektor x som inparameter och som beräknar det största elementet i vektorn. Funktionen skall kunna anropas enligt

```
--> m = Maximum( [0.9 2.1 -1.3 0.2] )
```

och m skall tilldelas värdet 2.1.

Lösning Funktionen `Maximum` blir

```
// Funktion för ett beräkna maximum
function [m]=Maximum( x )
   n=length(x);
   m=x(1);
   for i=2:n
      if x(i)>m
        m=x(i);
      end
  end
endfunction
```

Det finns enklare uppgifter som tränar alla moment innan allt sammanfogas.

Dessutom övningar på integraler och ekvationslösning med SciLab.

Föreläsning 3 $1 \times 45\,minuter$

- Begynnelsevärdesproblem. En Järnvägsvagn.
- Hur rör sig en fotboll?

Datorövning 2 $1 \times 45\,minuter$.

- Simulering av fotbollen. Luftmotstånd. Magnuskraft.

Föreläsning 3

Definition Ett *begynnelsevärdesproblem* kan beskrivas som: Hitta $y(t)$ sådan att

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \qquad t > 0,$$

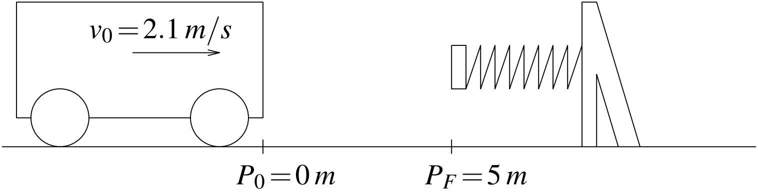
och $y(0) = y_0$.

Många problem från teknik och naturvetenskap kan formuleras som *begynnelsevärdesproblem.*

I SciLab finns funktionen `ode` för att beräkna lösningen till ett begynnelsevärdesproblem. Vi behöver skriva en funktion som beräknar $f(t, y)$.

Exempel: En Järnvägsvagn

En järnvägsvagn med massa 1376 kg rör sig med $v = 2.1\, m/s$ mot en bromskloss bestående av en ideal fjäder med fjäderkonstant 1.91 kN/m.



Frågor Hur långt trycks fjädern in? Hur lång tid tar det innan vagnen vänt och passerat $P_0 = 0$ igen? Är lösningen realistisk?

Matematisk Modell

Målet är att beräkna vagnens position $p(t)$ för $t > 0$. Vi behöver även beräkna vagnens hastighet $v(t)$. Rörelseekvationerna är

$$\frac{dp}{dt} = v(t) \text{ och } \frac{dv}{dt} = a(t) = F(t)/m,$$

där $F(t)$ är den kraft som verkar på vagnen vid tiden t och m är vagnens massa. Antagandet om ideal fjäder med fjäderkonstant K ger

$$F(t) = \begin{cases} K(p(t) - P_F), & p > P_F, \\ 0, & p \leq P_F. \end{cases}$$

Vi får ett begynnelsevärdes problem:

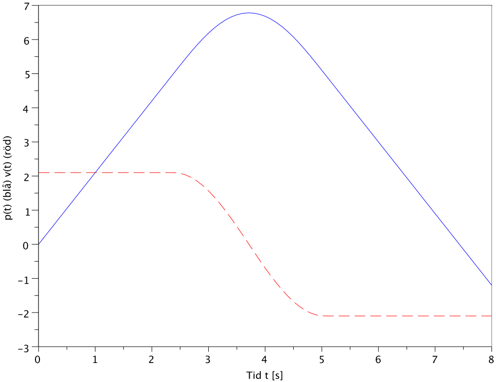
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ F(t)/m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.1 \end{pmatrix}.$$

Lösning Inför $S(t) = (p(t), v(t))^T$ och skriv en funktion

```
function [dS]=Vagn(t,S)
  m=1376;K=1910;Pf=5.0;  p=S(1);v=S(2);
  if p>Pf then
   F=-K*(p-Pf);
  else
    F=0;
  end;
  dS=[ v ; F/m];
endfunction
```

Vi kan nu lösa begynnelsevärdes problemet med `ode`

```
t=0:0.1:8;
S0=[ 0 ; 2.1 ];
S=ode(S0,0,t,Vagn);
p=S(1,:);v=S(2,:);
plot(t,p,'b-');plot(t,v,'r--');
```

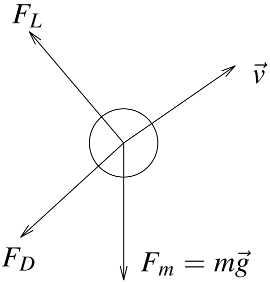


Vi ser att vagnen vänder ungefär vid $p(3.7) = 6.782\,m$. Då är hastigheten $v(3.7) = 0.0351$.

Relativt enkelt att införa fler effekter som exempelvis friktion.

Simulering av en fotboll

Vi söker bollens *position* $p(t)$ och dess *hastighet* $v(t)$. Vilka krafter verkar på fotbollen?



Vi har Gravitation, Luftmotstånd, och Magnuskraft. Dessa ges av

$$F_D(t) = -\frac{1}{2}\rho A C_D |\vec{v}(t)|\vec{v}(t) \text{ och } F_L(t) = \rho A C_L(\vec{\omega} \times \vec{v}(t)).$$

Datorövning 2

Mål och Syfte Eleverna skall arbeta med en existerande SciLab kod som simulerar bollrörelse där hänsyn endast tas till gravitationen. Simulering skall användas för att besvara flera frågor. Modellen skall kompletteras med luftmotstånd och Magnus kraft.

I övningen beskrivs en straffspark av Roberto Carlos från 1997 som finns på YouTube.

Uppgift Då man genomför en simulering är man helt beroende av flera parametrar som är olika svåra att mäta. Gravitationskonstanten g och bollens massa m kan mätas med hög noggranhet. En höghastighetskamera kan dessutom mäta bollens utgångshastighet med bra noggranhet.

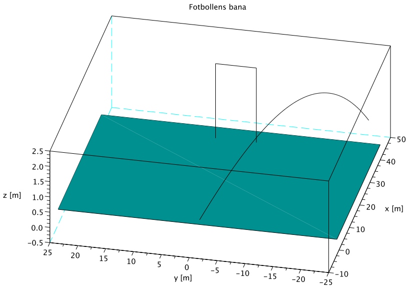
Däremot är koefficienten C_D som bestämmer luftmotståndet betydligt svårare att mäta.

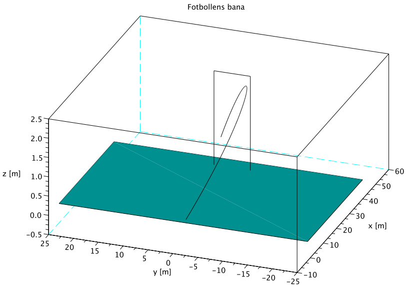
Antag att vi i ett experiment skjuter iväg en boll med utgångshastighet

$$V_0 = (17.32, 0.45, 11.51)^T \qquad [m/s].$$

Bollen landar vid $(x_e, y_e) = (23.50, 0.61)$. Övriga parametrar har de värden som givits tidigare. Använd denna information för att bestämma luftmotståndskoefficienten C_D i det aktuella fallet.

Uppgift Magnuskraften gör det möjligt att skruva en boll. Hur snabbt måste bollen rotera för att få tillräcklig skruv för att gå in i målet?





Till vänster ett rent bakåtspin, $\vec{\omega} = (0\ -6.9\,0)^T$. Till höger har sidospin lags till och bollen går in i mål.

Hur gick det

SciLab Föreläsning 1, 2 och Datorövning 2 upplevs som lite svåra. Det är högt tempo och många uppgifter som skall göras.

Simuleringen Förelösning 3 upplevs som lite enklare. Efter Järnvägsvagnen kan eleverna förstå hur simuleringsprogramet för fotbollen är uppbyggt. Elever utan tidigare programmeringserfarenhet hinner färdigt.

Elever som kunde programmera brukar kunna utvckla modellen ytterligare så att bollen kan studsa i marken eller så att bollens rotation bromsas.

Sammanfattning

SciLab är ett gratis programpaket som kan användas för att simulera fysikaliska förlopp. Det är realistiskt att använda på gymnasiet.

Det material som utvecklats (Föreläsningar och Datorövningar) finns tillgängligt ifall någon är intresserad.

Tack för er uppmärksamhet!