ÖVNINGAR
I
MATEMATIK

Göran Forsling

14 april 2011

Förord.

- Tänker du börja studera på ett tekniskt/naturvetenskapligt program till hösten?
- Vill du ge dina studier en flygande start?

I stort sett vilken teknisk/naturvetenskaplig utbildning du än väljer, så börjar studierna med en ansenlig mängd matematik. Lyckas man väl med dessa matematikkurser, så ligger vägen öppen för fortsatt lyckade studier. Ett bra sätt, för att underlätta matematikstudierna, är att repetera gymnasiematematiken innan du börjar på högskolan/universitetet.

Det häfte som du just tittar i, innehåller ett antal övningar som kan vara lämpliga att arbeta med under en sådan repetition. Vi är medvetna om att inte alla får behålla sina gymnasieböcker. Därför innehåller häftet även en del teoriavsnitt och exempel. Några kommentarer till övningarna.

- Försök att göra uppgifterna utan hjälp av miniräknare och formelsamlingar. Det är viktigt att lära sig behärska räknelagar m.m. utan att använda hjälpmedel.
- Försök kontrollera rimligheten i dina svar, innan du jämför med facit. Några exempel på kontrollmöjligheter:
  - Om du förenklar ett uttryck som innehåller storheterna a och b, så skall det ursprungliga och det förenklade uttrycket vara lika för alla värden på dessa storheter. Testa med några olika värden på a och b för att se att uttrycken är lika för åtminstone dessa värden.
  - Löser du en ekvation, så skall lösningarna förstås uppfylla ekvationen. Sätt in lösningarna i ekvationen och kontrollera att högerled och vänsterled blir lika.
  - Ibland kan man rita figurer som illustrerar problemet (t.ex. när det gäller trigonometri och geometri). Gör det!
- I slutet av varje kapitel finns en del stjärnmärkta övningar. Det kan vara lämpligt att först arbeta med de uppgifter som ej är stjärnmärkta, för att senare i mån av tid öva vidare på (*)-uppgifterna.

Övningshäftet finns att hämta på

http://www.mai.liu.se/TM/repetition/

Lycka till.

Innehåll

Diagnostiskt prov

Försök att lösa dessa uppgifter utan hjälpmedel. Det kan hända att du tycker att en del uppgifter är svåra, men det ska du inte bli orolig för. Häftet innehåller förklaringar, exempel och övningar som gör att du säkerligen kommer att klara diagnostiska provet mycket bättre efter att ha arbetat med övningshäftet.

1. Lös ekvationen $\dfrac{x-1}{3x+4} = 1.$

2. Skriv $\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$ som ett bråk.

3. Förenkla uttrycket $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$ så långt som möjligt.

4. Bestäm alla lösningar till ekvationen $4x^2 - 6x + 1 = 0.$

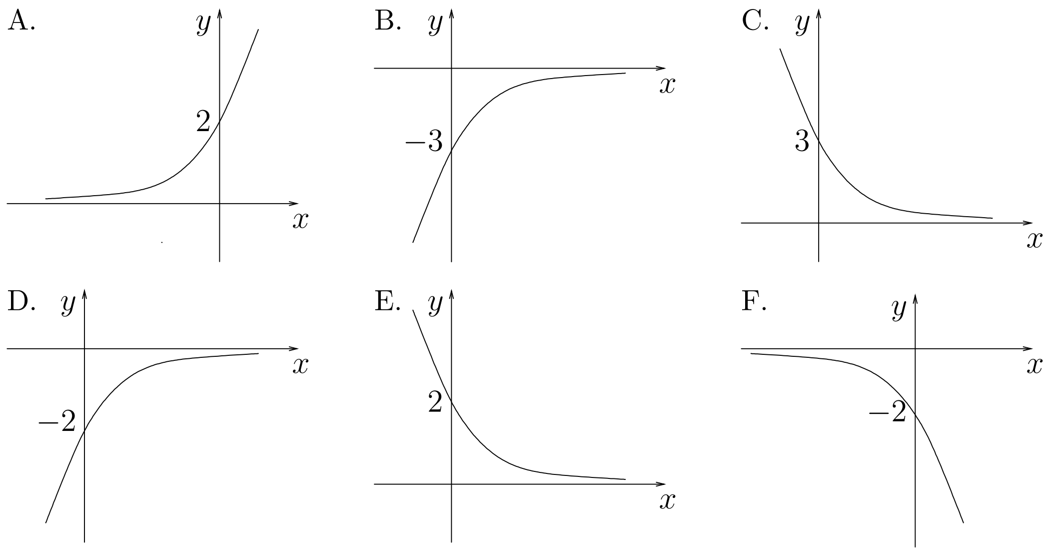
5. Ange alla x sådana att $|2x+3| = 2.$

6. För vilka x gäller olikheten $x^2 < 9$?

7. Förenkla $\dfrac{b^2\left(a^2 b\right)^{-3}\sqrt{a}}{a^{3/2}b^{-1}}$ så långt som möjligt.

8. Rita funktionen $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 1$, $-1 \leq x \leq 2$ och ange funktionens största och minsta värde.

9. Vilken av nedanstående figurer åskådliggör bäst funktionen $y = 2e^{-3x}$?



10. Bestäm derivatan av $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+1}.$

11. Förenkla $\lg 15 + 2\lg 2 - \lg 6$ så långt som möjligt.

12. Bestäm $\cos v$ då v ligger i andra kvadranten och $\sin v = \dfrac{1}{3}.$

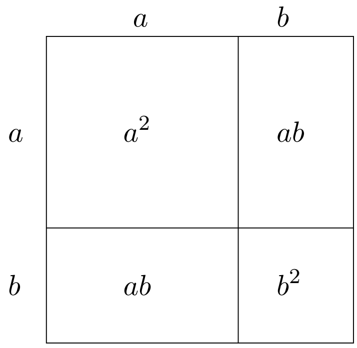
13. Bestäm alla x som uppfyller ekvationen $\sin x = \dfrac{1}{2}.$

1 Förenklingar och omskrivningar

Vi startar med några elementära räknelagar:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && (1)\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && (2)\\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && (3)\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) && (4)\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) && (5)
\end{aligned}$$

De två första kallas *kvadreringsreglerna*, den tredje kallas *konjugatregeln* och de två sista är *kubreglerna*. Samtliga dessa räknelagar kan förstås kontrolleras genom att man utför multiplikationerna i vänsterledet i (1)–(3) respektive högerledet i (4)–(5). Den 1:a kvadreringsregeln kan vi även se på följande geometriska sätt, i alla fall då a och b är positiva.



Vänsterledet i ekv. (1) är arean av hela kvadraten med sidan $a+b$, högerledet är summan av arean av de fyra delar som kvadraten består av. Konjugatregeln och 2:a kvadreringsregeln kan på motsvarande sätt ges en geometrisk tolkning. Konjugatregeln är för övrigt ofta användbar då det gäller att förenkla uttryck som innehåller rotuttryck i nämnaren.

Exempel 1 Förenkla $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Vi förlänger uttrycket med nämnarens konjugat, d.v.s. $\sqrt{2}+1$ och får

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \sqrt{2}+1.$$

□

Exempel 2 Förenkla $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$.

Vi sätter uttrycket på minsta gemensamma nämnare, d.v.s. 12 och får

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{6+4-3}{12}=\frac{7}{12}.$$

$\square$

Exempel 3 Förenkla uttrycket $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

Vi gör liknämnigt i flera steg, med start "inifrån":

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{x+1}{2x+1}.$$

$\square$

Övningar

1. Beräkna:

   a) $(-3)^2-(-2)^3$ b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ c) $3+\dfrac{1}{7}-\dfrac{15}{14}-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{3}{\frac{4}{5}+1}$

   e) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$ f) $2^{(2^3)}-\left(2^2\right)^3$ g) $2\cdot 3^2-(2\cdot 3)^2$ h) $6^3-2^3\cdot 3^3$

2. Förenkla uttrycken

   a) $\dfrac{4a^2b^4\cdot ab^3}{a^4b^2}$ b) $\left(2ab^2\right)^3$ c) $\dfrac{8\left(b^3a\right)^2}{(-a)^2\cdot\left(-2b^2\right)^3}$ d) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^2\cdot a^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{2a}\right)^{-5}$

3. Utveckla:

   a) $(a+b)^2$ b) $(a-b)^2$ c) $(3a-5b)^2$ d) $(a-b)(a+b)$
   e) $(a+b)^3$ f) $(a-b)^3$ g) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ h) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

4. Skriv som en produkt av så många faktorer som möjligt, genom att "känna igen" t.ex. kvadrerings- och konjugatregler:

   a) a^2-4b^2 b) $75-3y^2$ c) $75x-30xy+3xy^2$ d) x^3+1

   e) $16x^2-9$ f) $x^2-4xy+4y^2$ g) $3x^3-27x$

5. Skriv om så att nämnaren ej innehåller några rottecken:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ b) $\dfrac{1}{1-(\sqrt{3}-1)^2}$

6. Förenkla följande uttryck:

a) $(p-1)^2+(p+1)^2-2p^2$ b) $(r+s)^2-(r-s)^2$ c) $\dfrac{3x+2}{5}-\dfrac{2x-1}{5}$

d) $\dfrac{a^2-ab}{a^2-b^2}$ e) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$ f) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$

7. I många fysikaliska sammanhang dyker sambandet $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ upp. Talen a och b är positiva storheter. Om t.ex. två elektriska motstånd med resistanserna a resp b parallellkopplas kommer denna krets att ha motståndet y.
Lös ut y ur sambandet. Vad kan sägas om y jämfört med a och b?

8. Utveckla:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a-2b-3c)^2$ c) $(a+b+c)^3$

9. Utveckla:

a) $(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)$
b) $(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$

(*) 10. Skriv som en produkt av så många faktorer som möjligt:

a) $27x^3-1$ b) $100xy-125x^2-20y^2$ c) x^4-16y^4
d) x^4-2x^2+1 e) x^6-y^6

(*) 11. Förenkla:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}}$ b) $\dfrac{a+3}{2a-\dfrac{a}{a-\dfrac{a^2-2}{1+a}}}$

c) $\left(6+\sqrt{2}\right)\sqrt{\left(6+\sqrt{2}\right)^2-24\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{x-x^3}{x^3+x^2}\Big/\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x}$

(*) 12. Visa 2:a kvadreringsregeln genom att tolka uttrycken som areor.

Polynomdivision.

Om $p(x)$, $q(x)$ och $r(x)$ är polynom, sådana att

$$\frac{p(x)}{q(x)}=k(x)+\frac{r(x)}{q(x)} \tag{6}$$

där $r(x)$ har lägre gradtal än $q(x)$, kallar vi $k(x)$ för *kvoten* och $r(x)$ för *resten* då $p(x)$ divideras med $q(x)$. För att bestämma $k(x)$ och $r(x)$ går man till väga på liknande sätt som när man bestämmer kvot och rest vid division mellan två heltal.

Exempel 4 Utför polynomdivisionen $\dfrac{2x^3 - 6x^2 + 10x - 8}{x^2 - 2x + 2}$.

Uppställt med ”liggande stolen” fås

$$\begin{array}{rrrrrrr}
2x & -2 & & & & & \\ \cline{1-4}
2x^3 & -6x^2 & +10x & -8 & \multicolumn{1}{|r}{x^2} & -2x & +2 \\ \cline{5-7}
-(2x^3 & -4x^2 & +\ 4x) & & & & \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +\ 6x & -8 & & & \\
 & -(-2x^2 & +\ 4x & -4) & & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x & -4 & & &
\end{array}$$

De steg som utförts ovan är följande:

- Utgå från uppställningen

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\hline
2x^3 & -6x^2 & +10x & -8 & \multicolumn{1}{|r}{x^2} & -2x & +2 \\ \cline{5-7}
\end{array}$$

- x^2 går $2x$ gånger i $2x^3$. Subtrahera $2x(x^2 - 2x + 2)$.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
2x & & & & & & \\ \hline
2x^3 & -6x^2 & +10x & -8 & \multicolumn{1}{|r}{x^2} & -2x & +2 \\ \cline{5-7}
-(2x^3 & -4x^2 & +\ 4x) & & & & \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +\ 6x & -8 & & &
\end{array}$$

- x^2 går -2 gånger i $-2x^2$. Subtrahera $-2(x^2 - 2x + 2)$.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
2x & -2 & & & & & \\ \hline
2x^3 & -6x^2 & +10x & -8 & \multicolumn{1}{|r}{x^2} & -2x & +2 \\ \cline{5-7}
-(2x^3 & -4x^2 & +\ 4x) & & & & \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +\ 6x & -8 & & & \\
 & -(-2x^2 & +\ 4x & -4) & & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x & -4 & & &
\end{array}$$

Använder vi istället ”trappan” blir uppställningen

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 2x & -2 & & \\ \cline{4-7}
x^2 & -2x & +2 & \multicolumn{1}{|r}{2x^3} & -6x^2 & +10x & -8 \\ \cline{1-3}
 & & & -(2x^3 & -4x^2 & +\ 4x) & \\ \cline{4-7}
 & & & & -2x^2 & +\ 6x & -8 \\
 & & & & -(-2x^2 & +\ 4x & -4) \\ \cline{5-7}
 & & & & & 2x & -4
\end{array}$$

Som synes är skillnaden mellan de olika uppställningarna mest av kosmetisk art, räkningarna blir desamma.

Ur kalkylen ovan får vi kvoten $k(x) = 2x - 2$ och resten $r(x) = 2x - 4$, d.v.s.

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 10x - 8}{x^2 - 2x + 2} = 2x - 2 + \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2}.$$

OBS: En enkel kontroll av att man räknat rätt, fås genom att multiplicera båda led med nämnaren $x^2 - 2x + 2$.

$\square$

Övningar

13. Utför polynomdivisionen:

 a) $\dfrac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$ b) $\dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ c) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x - 2}$

14. Bestäm kvot och rest då $P(x) = x^4 + x^2 - 5x + 3$ divideras med

 a) $x - 2$

 b) $x - 1$

 c) $x + 3$.

 d) Beräkna $P(2)$, $P(1)$ och $P(-3)$. Ser du något samband?

(*) e) Bevisa det samband du förhoppningsvis såg.

(*) 15. Bestäm resten då polynomet $x^{100} - 2x^{10} + 1$ divideras med

 a) $x - 1$ b) $x + 2$ c) $x + 1$

2 Ekvationslösning

Ekvationslösning är vad det låter som. Det handlar om att finna *samtliga* tal som uppfyller en given ekvation.

Exempel 5 Lös ekvationen $2x - 3 = 4(5 - 3x)$.

Ekvationen kan skrivas $2x - 3 = 20 - 12x$. Vi möblerar om så att alla x hamnar på ena sidan och alla konstanter på den andra och får ekvationen $14x = 23$ d.v.s. $x = 23/14$.

□

Exempel 6 Lös ekvationen $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$.

Samla konstanterna på högra sidan och gör liknämnigt, så fås

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3}{15} - \frac{5}{15} = -\frac{2}{15}.$$

Detta ger lösningen $x = -15/2$.

□

Exempel 7 Lös ekvationen $(x - 1)(x - 4) = (x - 4)(3 - x)$.

Enklast hanterar vi denna ekvation genom att möblera om så att vi får 0 i högerledet. Vi får då ekvationen

$$(x - 1)(x - 4) - (x - 4)(3 - x) = 0$$

vilket kan skrivas om som

$$\big((x - 1) - (3 - x)\big)(x - 4) = 0$$

d.v.s.

$$(2x - 4)(x - 4) = 0.$$

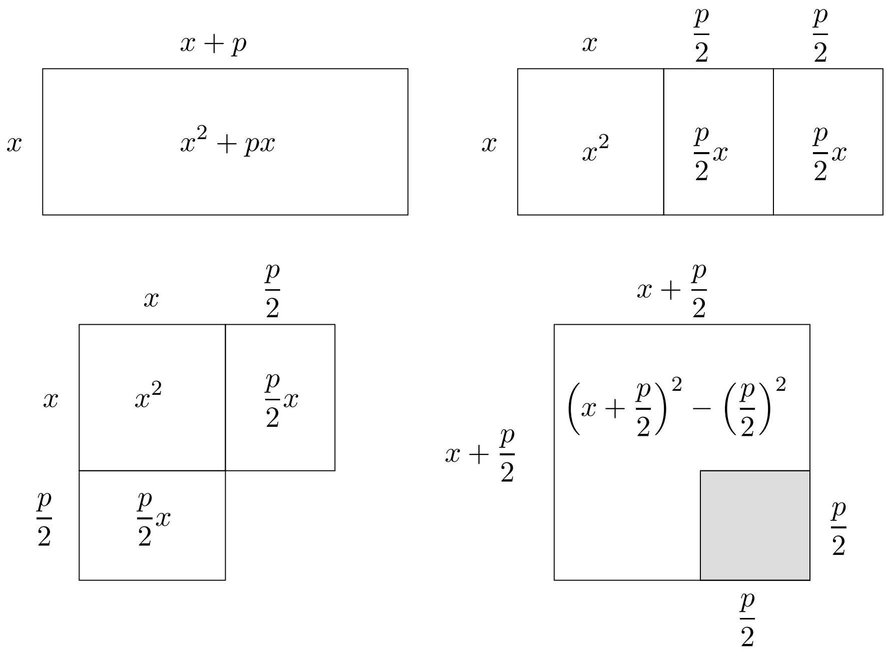
Således har ekvationen lösningarna $x = 2$ eller $x = 4$.

(*Ett mycket vanligt fel är att man direkt dividerar båda led med den gemensamma faktorn* $(x-4)$ *och landar i ekvationen* $x-1 = 3-x$. *Då har man dock dessvärre tappat bort en lösning. Division med* $(x - 4)$ *förutsätter ju att* $x \neq 4$.)

□

Andragradsekvationer.

Betrakta en allmän andragradsekvation $x^2 + px + q = 0$ där p och q är konstanter. För att härleda en formel för ekvationens rötter, använder man sig av en omskrivning som är mycket vanlig då man arbetar med andragradsuttryck, nämligen *kvadratkomplettering*. Detta innebär att man samlar alla uttryck som innehåller x i en kvadrat, vilket kan ses geometriskt i nedanstående figur.



Alltså är $x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ så $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)$.

Vi kan även se detta algebraiskt genom att använda oss av 1:a kvadreringsregeln:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right).$$

Med denna omskrivning kan ekvationen $x^2 + px + q = 0$ tecknas

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

och under förutsättning att $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ så har ekvationen lösningarna

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

d.v.s.

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .}$$

Övningar

16. Lös ekvationerna:

    a) $2x - 3 = 5 - 2x$ b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{12}$ d) $\frac{x}{\frac{2}{x} - 1} + \frac{4}{x - 2} = 0$

17. Lös följande andragradsekvationer:

    a) $15x^2 = 16x$ b) $8(x - 3)(x + 11) = 0$ c) $x^2 + 7x + 12 = 0$
    d) $14x^2 - 27x + 9 = 0$ e) $3(x + 2)^2 = 4(x^2 - 4)$ f) $3(x + 1)^2 = 3(x^2 - 1)$

(*) 18. Lös ekvationerna:

    a) $(x + 1)(2x - 3) = x^2 - 2x + 9$ b) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
    c) $\frac{11x - \frac{5}{2}}{6x - \frac{3}{2}} - \frac{x + \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{2}} = 1$

Polynomekvationer av högre grad.

Att lösa ekvationer av grad större än 2 är i allmänhet krångligt (eller ibland omöjligt). I vissa fall kan man dock klara det relativt enkelt genom att antingen byta variabler eller genom att försöka gissa någon lösning och använda polynomdivision.

Exempel 8 Lös ekvationen $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Ekvationen innehåller endast jämna potenser av x, så vi sätter $t = x^2$. Då får vi den nya ekvationen $t^2 + t - 6 = 0$ som har lösningarna $t = 2$ eller $t = -3$. Går vi tillbaks till den ursprungliga variabeln, har vi alltså att $x^2 = 2$ eller $x^2 = -3$. Den första ekvationen har lösningarna $x = \pm\sqrt{2}$ medan den senare saknar reella lösningar.

Svar: $x = \sqrt{2}$ eller $x = -\sqrt{2}$.

$\square$

Exempel 9 Bestäm alla lösningar till ekvationen $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Vi börjar med att försöka gissa en rot. Vi prövar med några små heltal och upptäcker att $x = -2$ är en lösning till ekvationen. Alltså innehåller polynomet faktorn $(x + 2)$. Därefter dividerar vi polynomet med den faktorn och får

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x + 2} = x^2 - 9 \ .$$

Vi fortsätter med att bestämma alla lösningar till ekvationen $x^2 - 9 = 0$, och finner att $x = \pm 3$, d.v.s.

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x^2 - 9) = (x + 2)(x + 3)(x - 3) \ .$$

Ekvationen har således lösningarna $x = -2$, $x = -3$ eller $x = 3$.

$\square$

Övningar

19. Lös ekvationerna:

    a) $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

20. Skriv som en produkt av så många reella faktorer som möjligt:

    a) $x^2 + 3x - 4$ b) $6 - 2x - 4x^2$

21. Ange en andragradsekvation med rötterna 2 och 3.

22. Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna r_1 och r_2.

    a) Bestäm $r_1 + r_2$
    b) Bestäm $r_1 \cdot r_2$
    c) Lägg resultaten på minnet, här har du en bra kontrollmöjlighet.

(*) 23. Lös ekvationerna:

    a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{17}{4}$ b) $x^3 - 8 = 7(x - 2)$
    c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ d) $(x - 3)^3 = (2x + 1)^3$
    e) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x} = x + 12$ f) $\left(x^2 + 2x - 5\right)^2 - \left(x^2 + 2x - 5\right) = 6$

(*) 24. För vilka värden på a har ekvationen

$$(a + 3)x^2 - (a - 6)x + a - 21 = 0$$

två likadana rötter? Lös ekvationen för dessa a.

3 Absolutbelopp

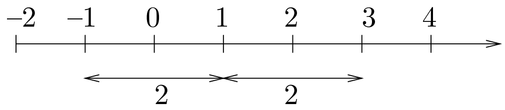
Absolutbeloppet av ett tal x definieras som

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad \text{om } x \geq 0 \\ -x & , \quad \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

Absolutbelopet av x är alltså alltid positivt, $-x$ är ju positivt om x är negativt. På tallinjen kan talet $|x|$ tolkas som avståndet mellan x och 0. På motsvarande vis kan $|x - a|$ tolkas som avståndet mellan x och a.

Exempel 10 Bestäm de x som uppfyller likheten $|x - 1| = 2$.

Vi söker de punkter x på tallinjen, vilkas avstånd till talet 1 är 2.



Likheten är tydligen uppfylld då $x = -1$ eller $x = 3$.

□

Övningar

25. Räkna ut

a) $|(-2)^4 + (-3)^3|$ b) $|(-2)^4| + |(-3)^3|$ c) $\left|\dfrac{(-2)^3}{(-3)^2}\right|$ d) $\dfrac{|(-2)^3|}{|(-3)^2|}$

26. Bestäm alla x som uppfyller villkoren

a) $|x - 5| = 3$ b) $|2x - 4| = 6$ c) $|x - 3| < 4$ d) $|x + 4| \geq 2$

Avståndstolkningen ger dock inte alltid den enklaste lösningsgången. Ofta är det lämpligare att använda sig av definitionen och dela upp i olika fall.

Exempel 11 För vilka x är $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| = 3$?

Likheten $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| = 3$ gäller om och endast om $\dfrac{x+1}{x-2} = \pm 3$.

$$\frac{x+1}{x-2} = 3 \quad \text{ger} \quad x + 1 = 3(x-2) \quad \text{d.v.s.} \quad x = 7/2$$

$$\frac{x+1}{x-2} = -3 \quad \text{ger} \quad x + 1 = -3(x-2) \quad \text{d.v.s.} \quad x = 5/4$$

Svar: $x = 7/2$ eller $x = 5/4$.

□

Exempel 12 Lös ekvationen $|x| = |2x + 4|$.

Uttrycken innanför beloppstecknen blir 0 då $x = 0$ respektive $x = -2$. Vi tittar på tre olika fall.

$x \geq 0$: För dessa x är $|x| = x$ och $|2x + 4| = 2x + 4$, så ekvationen lyder $x = 2x + 4$, d.v.s. $x = -4$. Men vi kommer ihåg att den ekvation vi nyss löste enbart gäller då $x \geq 0$, så vi ignorerar den "lösning" vi fick fram eftersom $-4 < 0$.

$-2 \leq x \leq 0$: För dessa x är $|x| = -x$ och $|2x+4| = 2x+4$. så ekvationen lyder $-x = 2x+4$ d.v.s. $x = -4/3$. Detta tal uppfyller olikheten $-2 \leq x < 0$.

$x \leq -2$: Här är $|x| = -x$ och $|2x+4| = -(2x+4)$ så ekvationen kan i detta fall skrivas $-x = -(2x + 4)$ d.v.s. $x = -4$. Detta är en lösning ty $-4 \leq -2$.

Svar: $x = -4$ eller $x = -4/3$.

□

Exempel 13 Lös ekvationen $x^2 - 2x - 3 = |x - 1|$.

Vi tittar på två olika fall, för att kunna eliminera beloppstecknet.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \text{ om } x-1 \geq 0 \text{ d.v.s. om } x \geq 1 \\ -(x-1) & , \text{ om } x-1 \leq 0 \text{ d.v.s. om } x \leq 1. \end{cases}$$

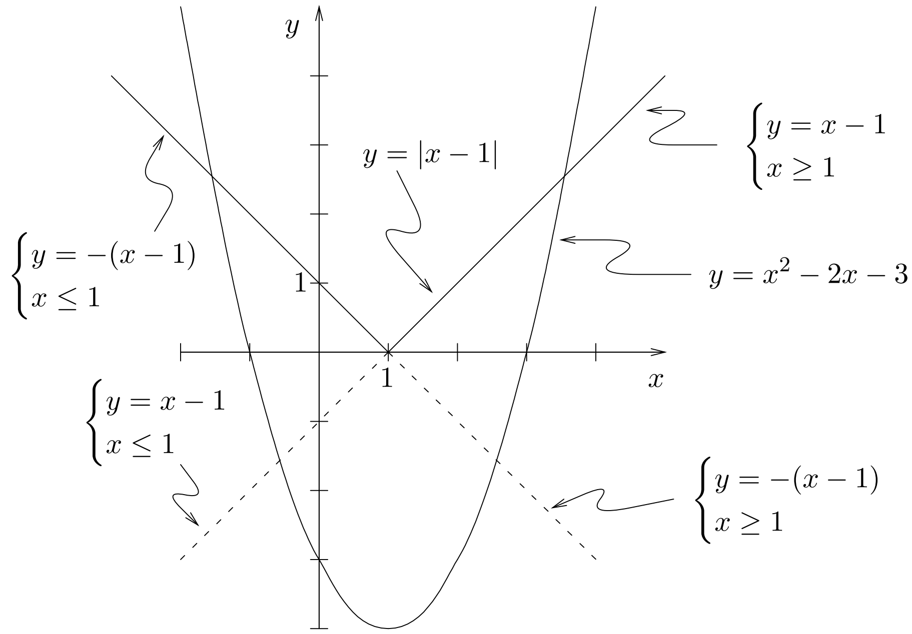
$x \geq 1$: För dessa x är $|x - 1| = x - 1$ och då lyder ekvationen $x^2 - 2x - 3 = x - 1$. Den ekvationen har de båda lösningarna $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, men av dessa är det endast $x = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$ som uppfyller kravet $x \geq 1$.

$x \leq 1$: Här är $|x-1| = -(x-1)$, så ekvationen blir $x^2 - 2x - 3 = -(x-1)$. Denna har lösningarna $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$, varav endast $x = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}$ uppfyller kravet $x \leq 1$.

Svar: $x = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}$ eller $x = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

□

I exemplet ovan fick vi fram två stycken "falska lösningar", d.v.s. två x-värden som inte var lösningar till ekvationen. Hur dessa dyker upp kan vi se genom att rita upp kurvorna $y = x^2 - 2x - 3$ och $y = |x - 1|$.



När vi delar upp ekvationen i två delar löser vi i tur och ordning de båda ekvationerna

$$x^2 - 2x - 3 = x - 1 \quad \text{resp} \quad x^2 - 2x - 3 = -(x-1)\ .$$

De streckade förlängningarna av linjerna $y = x - 1$ och $y = -(x-1)$ skär parabeln i de punkter som ger de "falska lösningarna".

Övningar

27. Bestäm alla x som uppfyller

    a) $|x-1| = |x+3|$ b) $|x-1| = 2|x-4|$ c) $|x| = x$ d) $|x-5| + |x+6| = 10$

28. Vilka x uppfyller följande samband?

    a) $\left|\dfrac{x+3}{x+5}\right| = 1$ b) $\left|\dfrac{x+3}{x+5}\right| = 3$ c) $\left|x^2 - 5x - 5\right| = 9$

(*) 29. Bestäm alla x som uppfyller:

    a) $|x-1| + 2|x+1| = 3$ b) $|x^2 - 3| < 1$ c) $|x^2 + 1| = -2x$

    d) $\Big||x| - 3\Big| = 1$ e) $\Big||x-1| - 2\Big| = 3$

4 Olikheter

För olikheter gäller följande räknelagar:

Om	$x < y$	så är	$x + a < y + a$	för varje reellt tal a	(7)
Om	$x < y$	så är	$ax < ay$	om a är positivt	(8)
Om	$x < y$	så är	$ax > ay$	om a är negativt	(9)

Speciellt visar (8) och (9) att man måste iaktta stor försiktighet vid multiplikation med okända storheter.

Exempel 14 För vilka x gäller olikheten $\dfrac{1}{x} < x$?

I stället för att multiplicera med x (som ju är okänd) samlar vi alla uttryck på en sida (så vi får 0 på andra sidan) och sätter allt på gemensam nämnare och faktoriserar uttrycken:

$\dfrac{1}{x} < x$ kan skrivas $x - \dfrac{1}{x} > 0$ d.v.s. $\dfrac{x^2 - 1}{x} > 0$ d.v.s. $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$

Olikheten löses nu enkelt genom teckenstudium av funktionen $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x		-1		0		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Olikheten gäller då $f(x) > 0$, alltså då $-1 < x < 0$ eller $x > 1$.

□

Övningar

30. För vilka x gäller olikheterna

a) $\dfrac{x}{2} + 1 < \dfrac{x}{3} - 1$ b) $x^2 \geq 4$ c) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x+5} \geq 0$

d) $x^2 - 10x + 25 > 0$ e) $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$ f) $0 < |x-1| < 3$

(*) 31. För vilka x gäller olikheterna

a) $1 < |2x-3| < 5$ b) $|x^2 - 4| < 2$ c) $\dfrac{1}{x} > 2x - 1$ d) $\dfrac{1 + 2x - 3x^2}{2x^2 - 5x + 2} \geq 0$

5 Potenser och logaritmer

Uttrycket a^x kallas för en *potens* med *basen* a och *exponenten* x. Följande räknelagar för potenser förutsätts vara kända (a, $b > 0$):

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

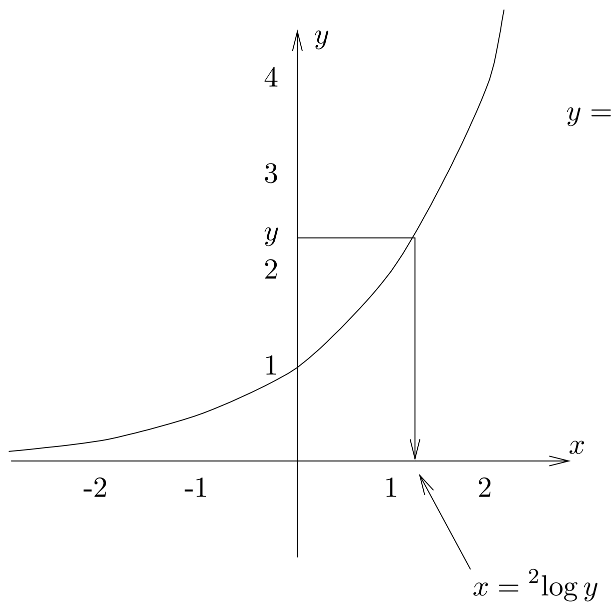
$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Om $a > 0$ är fixt och x får variera, definierar a^x en funktion som vi kallar för *exponentialfunktionen* med basen a. Exponentialfunktionen är *strängt växande* om $a > 1$ och *strängt avtagande* om $0 < a < 1$.

Den inversa funktionen till $y = a^x$, $x \in \mathbf{R}$ kallas för *logaritmfunktionen med basen* a och skrivs $x = {}^a\log y$. Nedan är detta åskådliggjort för $a = 2$



Likheterna $y = a^x$ och $x = {}^a\log y$ är således två olika sätt att uttrycka samma samband mellan talen x och y.

De två vanligaste logaritmerna är

- $y = \ln x = {}^{e}\log x$ (*naturliga logaritmen*) som är invers funktion till $x = e^y$
- $y = \lg x = {}^{10}\log x$ (*10-logaritmen*) som är invers funktion till $x = 10^y$

För den naturliga logaritmen gäller följande räknelagar:

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \quad \text{för alla } x > 0 \\ \ln(x \cdot y) &= \ln x + \ln y \quad \text{om } x > 0 \text{ och } y > 0 \\ \ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \quad \text{om } x > 0 \text{ och } y > 0 \\ \ln x^y &= y \cdot \ln x \quad \text{om } x > 0 \end{aligned}$$

Motsvarande lagar gäller även för 10-logaritmen (och andra logaritmer).

Exempel 15 Förenkla $5^{-2/7} \cdot \sqrt[7]{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{6/7}$.

$$5^{-2/7} \cdot \sqrt[7]{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{6/7} = 5^{-2/7} \cdot 5^{1/7} \cdot 5^{-6/7} = 5^{-2/7+1/7-6/7} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

$\square$

Exempel 16 Lös ekvationen $2^{2x} - 2^{x+1} = 8$.

Eftersom $2^{2x} = (2^x)^2$ och $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ inför vi en ny variabel $t = 2^x$. Ekvationen lyder då

$$t^2 - 2t = 8$$

och har lösningarna $t = 4$ eller $t = -2$ (kontrollera det). Sätter vi in detta i sambandet $t = 2^x$, så får vi två möjligheter. Antingen är $2^x = 4 = 2^2$ d.v.s. $x = 2$ eller också är $2^x = -2$ vilket är orimligt eftersom $2^x > 0$. Således har ekvationen endast lösningen $x = 2$.

$\square$

Övningar

32. Skissa kurvorna $y = 2^x$, $y = 10^x$ respektive $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i samma figur.

33. Förenkla så långt som möjligt:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\left(\sqrt{8}\right)^{2/3}$ d) $\dfrac{6^{13}}{3^{10} \cdot 2^3}$

e) $1000^{1/3}$ f) $16^{3/4}$ g) $\sqrt[3]{2} \cdot 2^{-4/3}$ h) $\dfrac{6^{x+y}}{3^x \cdot 2^y}$

34. Förenkla:

a) $\lg 10$ b) $\lg 1000$ c) $\ln \sqrt{e}$ d) $e^{\ln 3}$ e) $\lg 10^{-\pi}$

35. Sätt $\lg 2 = a$ och $\lg 3 = b$. Uttryck i a och b:

a) $\lg 4$ b) $\lg 6$ c) $\lg 8$

36. Skriv $a \ln x + b \ln y + c$ som en enda logaritm.

37. Lös ekvationerna:

a) $\lg x = -1$ b) $3 \ln x = 2$ c) $2^x = 3$

38. Många fysikaliska förlopp, t ex radioaktivt sönderfall, brukar beskrivas av ett exponentiellt avtagande av formen $y = Ae^{-kt}$ där A och k är positiva konstanter och t är tiden. I dessa sammanhang talar man ofta om *halveringstiden* d.v.s. den tid det tar för funktionen att avta från begynnelsevärdet till halva detta värde.
Betrakta funktionen $y = 20e^{-3t}$. Vilken halveringstid har denna funktion?

39. Lös ekvationerna:

a) $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 45$ b) $6^{x+1} + 6^{3-x} = 222$ c) $3 + 10 \cdot 2^{x/2} = 2^{x+5}$

(*) 40. Förenkla:

a) $\dfrac{\lg 30000 - \lg \sqrt{20} + \lg(10\sqrt{2000}) - \lg 3}{\lg 1000 + \lg \sqrt{10} + \lg 10}$ b) ${}^{5}\log 1000 - {}^{5}\log 40$

c) $2 \cdot {}^{4}\log \sqrt[3]{4} \cdot {}^{8}\log 64 - {}^{9}\log \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^{9}\log 1 + {}^{27}\log 9$ d) $x^{\ln x} - e^{(\ln x)^2}$

(*) 41. Vilket tal är störst?

a) $2^{1/3}$ eller $3^{2/9}$ b) $\left(1000^{1000}\right)^{1000}$ eller $1000^{\left(1000^{1000}\right)}$

(*) 42. Lös ekvationerna:

a) $\lg x - 2 \lg 7 = 2$ b) $5^x + 3 \cdot 5^{x-1} = 40$ c) $2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 3^{x+1} = 7$

d) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ e) $e^x + 4 \cdot e^{-x} = 4$ f) $15 - 25^x = 2 \cdot 5^x$

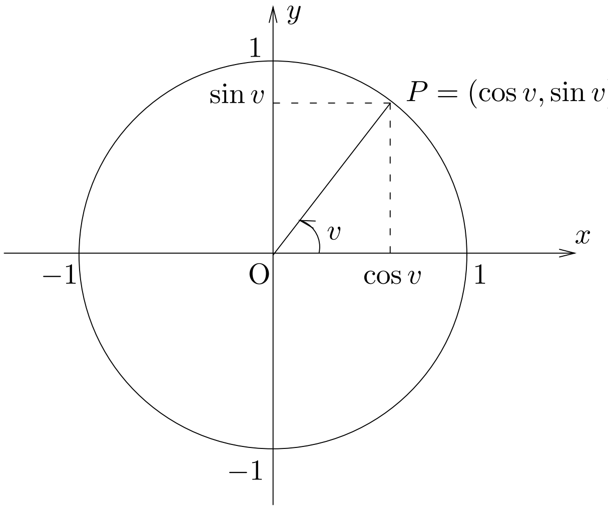
(*) 43. Ljudintensiteten, I, brukar jämföras med enreferensintensitet I_0 genom att man anger ljudintensitetsnivån $L = 10 \lg \dfrac{I}{I_0}$. Den på så sätt beräknade ljudintensitetsnivån sägs vara angiven i decibel, dB.

a) Hur många decibel ökar L om ljudintensiteten I fördubblas?

b) Man önskar sänka intensitetsnivån från 70 till 50 dB. Hur mycket måste ljudintensiteten sänkas?

6 Trigonometri

De trigonometriska funktionerna definieras med hjälp av nedanstående figur, så att $\cos v$ är x-koordinaten och $\sin v$ är y-koordinaten för punkten P på enhetscirkeln.



Vinkeln v räknas positiv moturs från positiva x-axeln. Vi mäter vinkeln i radianer, så att ett varv är 2π radianer (dvs samma mätetal som omkretsen på enhetscirkeln).

Övningar

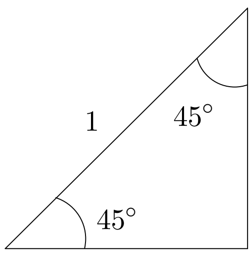
44. Omvandla följande vinklar till radianer:

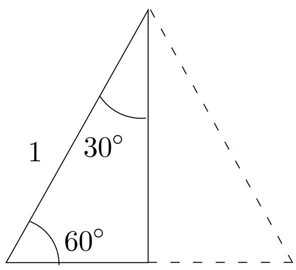
    a) $0°$ b) $90°$ c) $180°$ d) $45°$ e) $30°$ f) $60°$

45. Omvandla följande vinklar till grader:

    a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{5\pi}{6}$ d) $-\dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{3\pi}{2}$ f) 3π

46. Bestäm, med hjälp av Pythagoras' sats, kateterna i följande två rätvinkliga trianglar:





47. Bestäm, med hjälp av föregående uppgift:

    a) $\sin\dfrac{\pi}{4}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{4}$ c) $\sin\dfrac{\pi}{3}$ d) $\cos\dfrac{\pi}{3}$ e) $\sin\dfrac{\pi}{6}$ f) $\cos\dfrac{\pi}{6}$

48. Titta i enhetscirkeln. Uttryck med hjälp av $\cos v$ och $\sin v$:

a) $\sin(v+\pi)$ b) $\cos(v+\pi)$ c) $\sin(v+2\pi)$ d) $\cos(v+2\pi)$ e) $\sin(v+4\pi)$

49. Bestäm

a) $\sin\dfrac{3\pi}{4}$ b) $\cos\dfrac{-\pi}{4}$ c) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ d) $\sin\dfrac{-\pi}{3}$ e) $\sin\dfrac{15\pi}{4}$

50. Ytterligare ett samband, som man kan se i enhetscirkeln, är ”trigonometriska ettan”

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Varför är detta sant?

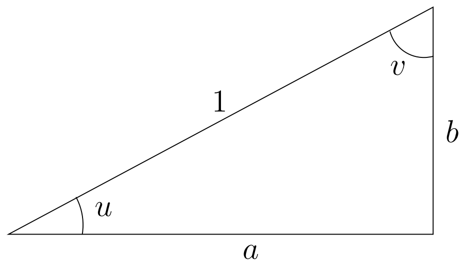
51. Förenkla $\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta$.

52. Beräkna

a) $\cos x$ då $\sin x = 1$ b) $\sin x$ då $\cos x = \dfrac{1}{2}$

c) $\cos x$ då $\sin x = -\dfrac{1}{3}$ d) $\sin x$ då $\cos x = \sqrt{2}$

53. Betrakta nedanstående figur.



a) Bestäm $\sin u$, $\cos u$, $\sin v$ och $\cos v$

b) Vilka av dem är lika?

c) Vad råder det för samband mellan u och v?

d) Vilka trigonometriska räknelagar kan man således se i denna figur?

54. Titta på enhetscirkeln igen. Låt Q vara punkten med koordinaterna $(\cos u, \sin u)$ och P punkten med koordinaterna $(\cos v, \sin v)$.

a) Hur ska u väljas för att P och Q ska få samma x-koordinat?
b) Hur ska u väljas för att P och Q ska få samma y-koordinat?
c) Vad blir sambandet mellan u och v om man vet att $\cos u = \cos v$?
d) Vad blir sambandet mellan u och v om man vet att $\sin u = \sin v$?

Ur den föregående uppgiften kan vi sammanfatta:

- $\sin x = \sin y$ om och endast om $\begin{cases} x = y + n\cdot 2\pi \\ \quad\text{eller} \\ x = (\pi - y) + n\cdot 2\pi \end{cases}$ för något heltal n (10)
- $\cos x = \cos y$ om och endast om $x = \pm y + n\cdot 2\pi$ för något heltal n (11)

Exempel 17 Lös ekvationen $\cos 2x = \cos x$.

Av sambandet (11) följer att $\cos 2x = \cos x$ om och endast om

$$2x = x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 2x = -x + n \cdot 2\pi$$

för något heltal n. Det första alternativet ger

$$x = n \cdot 2\pi$$

och det andra ger

$$\begin{aligned} 3x &= n \cdot 2\pi \\ &\text{d.v.s.} \\ x &= n \cdot 2\pi/3 \end{aligned}$$

Svar: $x = n \cdot 2\pi$ eller $x = n \cdot 2\pi/3$ för något heltal n.

□

Exempel 18 Lös ekvationen $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$.

Denna ekvation är, enligt samband (10), uppfylld om och endast om

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} - x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + n \cdot 2\pi$$

för något heltal n. Det första alternativet ger

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{4} &= \frac{5\pi}{6} - x + n \cdot 2\pi \\ &\text{d.v.s.} \\ 2x &= \frac{7\pi}{12} + n \cdot 2\pi \\ &\text{d.v.s.} \\ x &= \frac{7\pi}{24} + n \cdot \pi \end{aligned}$$

för något heltal n. Alternativ två ger

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{4} &= \pi - \left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + n \cdot 2\pi \\ &\text{d.v.s.} \\ \frac{\pi}{12} &= n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

för något heltal n, men eftersom den sista likheten är falsk för alla heltal n, oavsett vad x är, saknar denna ekvation lösningar.

Svar: $x = \dfrac{7\pi}{24} + n \cdot \pi$ för något heltal n.

□

Övningar

55. Bestäm alla lösningar till

a) $\sin v = 0$ b) $\cos v = 0$ c) $\sin v = 1$ d) $\cos v = 1$

e) $\sin v = \dfrac{1}{2}$ f) $\cos v = \dfrac{1}{2}$ g) $\sin v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ h) $\cos v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

56. Lös ekvationerna

a) $\sin 2x = \sin x$ b) $\cos^2 x + \cos x = 0$

Några trigonometriska samband:

$$\sin(v+\pi) = -\sin v \quad \text{och} \quad \cos(v+\pi) = -\cos v \tag{12}$$

$$\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \quad \text{och} \quad \cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \tag{13}$$

$$\sin(-v) = -\sin v \quad \text{och} \quad \cos(-v) = \cos v \tag{14}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(trigonometriska ettan)} \tag{15}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{16}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{17}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{18}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{19}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \tag{20}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{21}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{22}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{23}$$

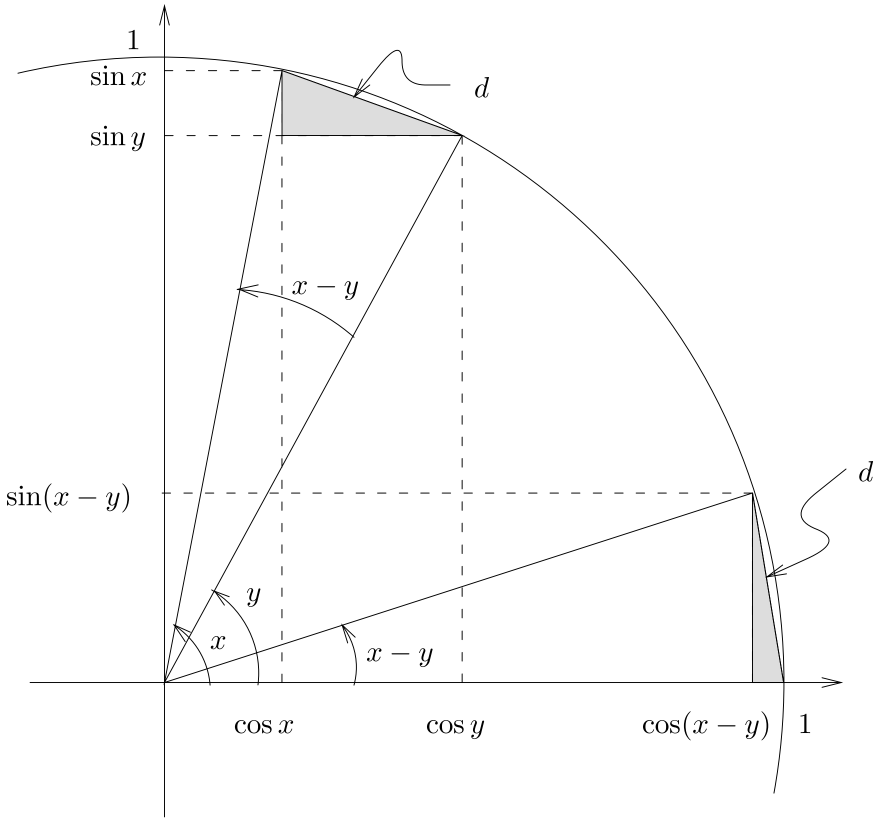
Sambanden (13) och (15) har vi redan tittat på och räknelagarna (12) och (14) ser man enkelt i enhetscirkeln.

Sambanden (16)–(19) är inte lika enkla att se, men om man lyckats visa dessa så följer (20) och (21) som specialfall med $x = y$.

Slutligen fås (22) och (23) ur (21).

Vi tar och tittar på ett bevis av (17).

Bevis Titta på nedanstående figur.



Vi ser två likadana likbenta trianglar utritade, toppvinkeln hos dem är $x-y$. Då måste ”baserna” i dessa trianglar vara lika långa, säg att längden är d . Dessa baser utgör dock hypotenusan i de två rätvinkliga skuggade trianglarna, så med hjälp av Pythagoras' sats erhålls sambandet

$$(\cos y-\cos x)^2+(\sin x-\sin y)^2=d^2=(1-\cos(x-y))^2+(\sin(x-y))^2$$

och om vi utvecklar detta och använder trigonometriska ettan så får vi direkt att

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

vilket skulle visas.

$\square$

Övningar

57. a) Hur ser man (12), d.v.s. att $\sin(v+\pi)=-\sin v$ och $\cos(v+\pi)=-\cos v$?

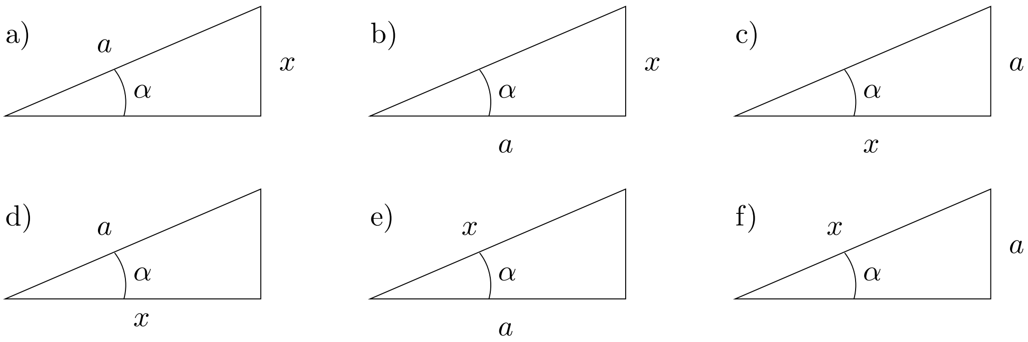
    b) Hur ser man (14), d.v.s. att $\sin(-v)=-\sin v$ och $\cos(-v)=\cos v$?

c) Visa att $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ och $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ genom att använda sambanden (21) på sidan 21.

58. Tangens för en vinkel definieras som $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$. Bestäm

a) $\tan 0$ b) $\tan \pi$ c) $\tan \dfrac{\pi}{4}$ d) $\tan \dfrac{\pi}{3}$ e) $\tan \dfrac{\pi}{6}$ f) $\tan \dfrac{\pi}{2}$

59. Uttryck x som funktion av a och α i figurerna nedan.



60. Visa att

a) $\sin\left(v+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos v$ b) $\cos\left(v+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin v$ c) $\tan\left(v+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan v}$

I uppgift c) förutsätts att $v \neq n\pi/2$, där n är heltal (varför?).

(*) 61. Utnyttja att $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ för att beräkna $\sin \dfrac{\pi}{12}$ och $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

(*) 62. Beräkna $\sin(x+y)$ då $\sin x = \dfrac{1}{4}$, $\sin y = \dfrac{1}{3}$ och både x och y ligger i intervallet $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

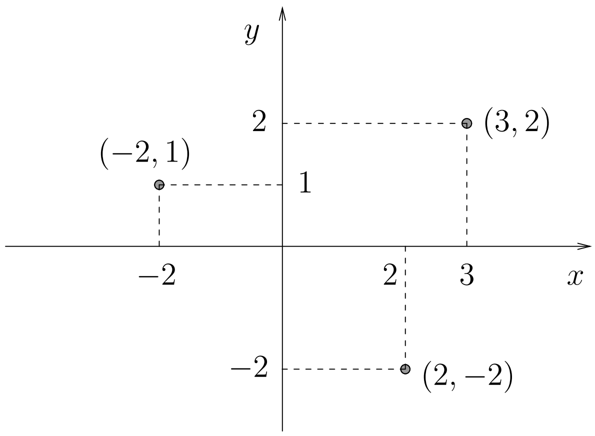
(*) 63. Visa att

a) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ b) $\tan(v+\pi) = \tan v$.

7 Geometri

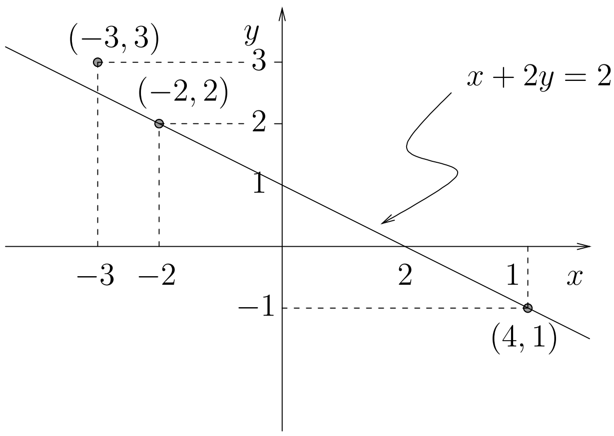
Räta linjer i planet

Vi förutsätter hela tiden att vi har ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem, och att det är känt hur lägen i planet kan beskrivas m.h.a. koordinater. Nedan följer ett exempel.



Nu ska vi titta på hur man beskriver linjer m.h.a. *ekvationer*. Ekvationerna kommer att ha formen $ax + by = c$, där a, b och c är konstanter. Innebörden av ekvationen är att en punkt ligger på linjen om och endast om dess koordinater (x, y) uppfyller linjens ekvation.

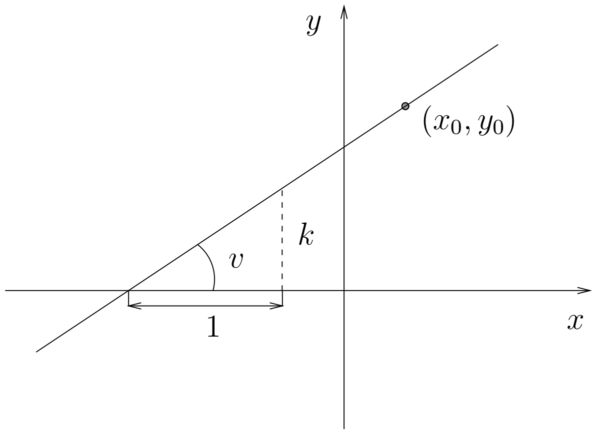
Exempel 19 Linjen i figuren nedan har ekvationen $x + 2y = 2$



Vi ser t.ex. att punkten $(-2, 2)$ ligger på linjen, ty med $x = -2$, $y = 2$ får vi att $x + 2y = -2 + 2 \cdot 2 = 2$ d.v.s. punkten $(-2, 2)$ uppfyller linjens ekvation. Kontrollera själv att $(4, 1)$ ligger på linjen, men att $(-3, 3)$ inte gör det.

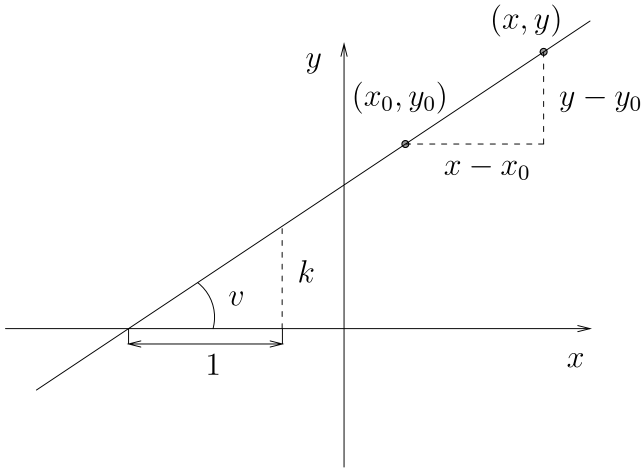
□

Det enklaste sättet att beskriva en linje är kanske att ange en punkt (x_0, y_0) på linjen och en riktningskoefficient k.



Ur figuren framgår att $k = \tan v$, förutsatt att inte linjen är lodrät. Vinkeln v kallas linjens *riktningsvinkel*, och införs moturs från positiva x-axeln. I bilden ovan är vinkeln spetsig och därmed är $k > 0$. För trubbig riktningsvinkel fås $k < 0$. Vi utesluter i fortsättningen lodräta linjer.

Vi låter nu (x_0, y_0) vara en fix punkt på linjen och $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en godtycklig punkt. Då följer av figuren nedan att (x, y) ligger på linjen om och endast om $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = k$.



Multiplicerar vi slutligen upp nämnaren så får vi linjens ekvation på *enpunktsform*:

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

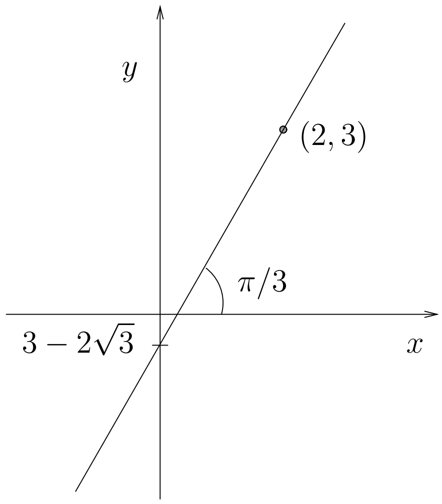
Observera att även punkten (x_0, y_0) uppfyller den inramade ekvationen, så denna ekvation beskriver *samtliga* punkter som ligger på linjen.

Exempel 20 Bestäm ekvationen för den linje som har riktningsvinkeln $\dfrac{\pi}{3}$ och som går genom punkten $(2, 3)$. Var skär linjen y-axeln?

Lutningen är $k = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ och den givna punkten $(x_0, y_0) = (2, 3)$, så enpunktformen ger linjens ekvation som

$$y - 3 = \sqrt{3}(x - 2)\ ,\ \text{d.v.s.}\quad y = \sqrt{3} \cdot x + 3 - 2\sqrt{3}.$$

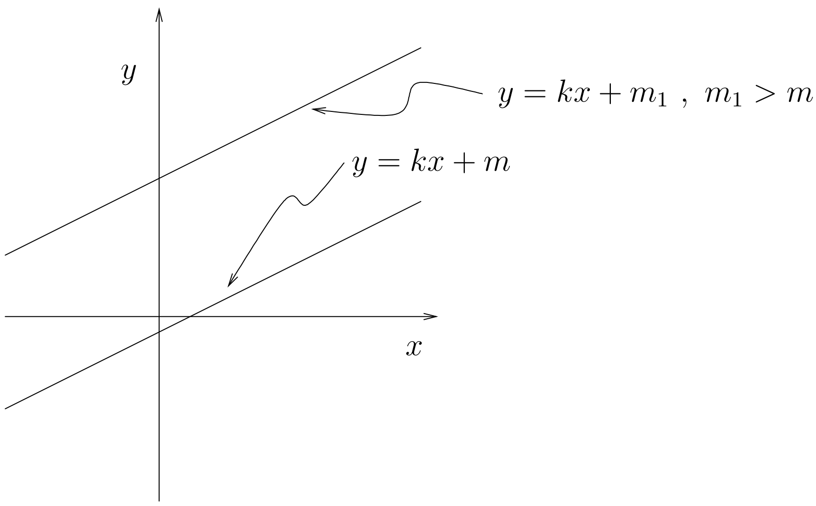
Efter den sista överflyttningen fick vi linjens ekvation på formen $y = kx + m$. Vad k betyder vet vi redan, det är linjens lutning. Betydelsen av m ser vi om vi sätter in $x = 0$. Vi finner att då $x = 0$, så blir $y = m$, d.v.s. talet m anger y-koordinaten för den punkt där linjen skär y-axeln.



Linjen i exemplet har således ekvationen $y = \sqrt{3} \cdot x + 3 - 2\sqrt{3}$ och den skär y-axeln i $y = 3 - 2\sqrt{3}$.

□

Observera att m ger linjens skärning med y-axeln, så m anger alltså hur ”högt” upp linjen ligger. Om vi behåller samma k men ökar värdet på m, så får vi därför en ny linje, med samma lutning, men ”högre upp”. Vår ursprungliga linje har *parallellförflyttats*.

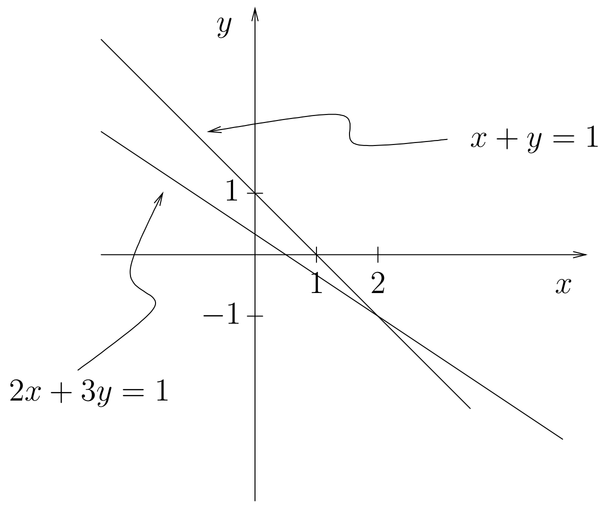


I linjär algebra kommer du att bl.a. studera linjära ekvationssystem. Då ekvationssystemet har två obekanta variabler, kan det tolkas geometriskt; man skär linjer med varandra. På motsvarande sätt kan ekvationssystem med tre obekanta tolkas som skärningen mellan plan i rummet.

Exempel 21 Bestäm de punkterna som ligger både på linjen $x+y=1$ och på linjen $2x+3y=1$.

Vi ska alltså bestämma de punkter vilkas koordinater (x,y) uppfyller båda ekvationerna. Vi löser ut x ur den första ekvationen, $x=1-y$, och sätter in i den andra. Då får vi $2(1-y)+3y=1$ d.v.s. $y=-1$. Sätter vi sedan in detta i den första ekvationen så fås $x=2$. Således har vi funnit att linjerna har en gemensam punkt med koordinater $(2,-1)$.

För att se att vi räknat rätt, prövar vi svaret. Vi sätter in $x=2$, $y=-1$ i båda ekvationerna (gör det) och kontrollerar att höger- och vänsterled blir lika. Dessutom kan vi grafiskt se att resultatet är rimligt, genom att rita de båda linjerna:

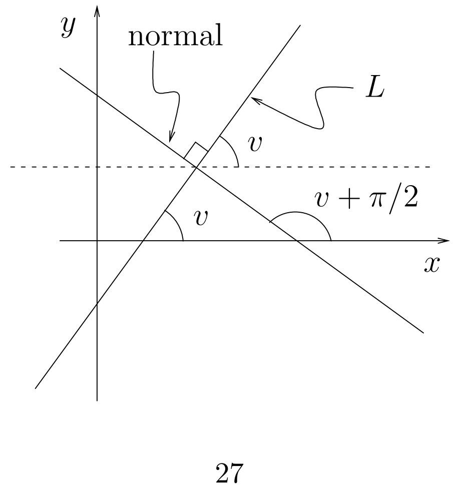


Ur figuren framgår tydligt att linjerna har en gemensam punkt och de uträknade koordinaterna förefaller stämma med skärningspunktens.

□

Linjens normal

En linje som skär en given rät linje L under rät vinkel kallas en *normal* till L.



Om linjen L har riktningsvinkel v, kommer riktningskoefficienten att vara $k = \tan v$. En normal till L har då riktningsvinkel $v + \pi/2$ och riktningskoefficient $k_n = \tan(v + \pi/2)$. Av övning 60 på sidan 23 framgår dock att $\tan(v + \pi/2) = -\dfrac{1}{\tan v}$, och således är $k_n = -\dfrac{1}{k}$ (förutsatt att L ej är vågrät eller lodrät).

Exempel 22 Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(5, 2)$ och är normal till linjen $L: \ x + 3y = 7$.

Linjen L kan skrivas $y = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3}x$, d.v.s. den har riktningskoefficient $k = -\dfrac{1}{3}$. Den sökta normalen har då riktningskoefficient $k_n = -\dfrac{1}{k} = 3$ och går genom punkten $(5, 2)$. Normalens ekvation är därför $y - 2 = 3(x - 5)$ d.v.s. $y = 3x - 13$.

□

Övningar

64. Ange ekvationen för linjen som går genom punkten med koordinater $(1, 2)$ och som har riktningsvinkeln

    a) $\pi/6$ b) $\pi/2 + \pi/6$ c) $\pi/2 - \pi/6$ d) $\pi - \pi/6$

65. Ange riktningskoefficient och riktningsvinkel för linjen

    a) $y = x + 3$ b) $x + y = 2$ c) $2x + 2y = -1$
    d) $x - \sqrt{3} \cdot y = 17$ e) $\sqrt{3} \cdot x + y = -1$

66. Bestäm, för linjerna i uppgift 65, deras skärning med x- och y-axlarna. Använd detta för att rita in dem i ett koordinatsystem.

67. Bestäm ekvationen för räta linjen genom punkterna $(3, -1)$ och $(1, 3)$, t.ex. genom att först bestämma linjens riktningskoefficient. Bestäm därpå linjens skärning med koordinataxlarna och verifiera resultatet i figur.

68. Visa att punkterna $(1, 2)$, $(4, -2)$ och $(-2, 6)$ ligger i rät linje. Verifiera i figur.

69. I följande deluppgifter ges ekvationerna för två räta linjer. Bestäm linjernas skärningspunkt, dels grafiskt, dels algebraiskt. Bestäm även linjernas skärningsvinkel, t.ex. genom att relatera denna till de båda riktningsvinklarna (rita figur).

    a) $\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \sqrt{3} \cdot y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

70. Bestäm ekvationen för den räta linje som skär linjen $x + 2y = 3$ på y-axeln, under rät vinkel.

(*) 71. Beräkna vinkelräta avståndet från origo till räta linjerna

    a) $2x + 3y = 6$ b) $2x + 3y = -6$ c) $2x + 3y = p$

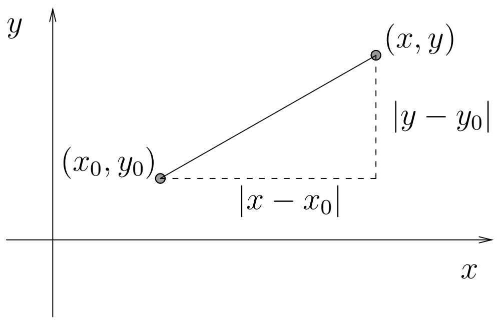
    t.ex. genom att bestämma skärningen med koordinataxlarna och räkna ut en triangelarea på två sätt.

Avståndsformeln och cirkelns ekvation

Betrakta två punkter (x, y) och (x_0, y_0). Avståndet mellan dem är

$$d = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_o|^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_o)^2}$$

vilket är en omedelbar följd av Pythagoras' sats.



En *cirkel* består av alla punkter (x, y) på ett visst givet avstånd $r > 0$ från medelpunkten (x_0, y_0). Punkten (x, y) ligger alltså på cirkeln om och endast om $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_o)^2} = r$. Eftersom båda leden är positiva är detta samband ekvivalent med det samband vi får om vi kvadrerar båda led. Vi har således fått fram följande.

> Cirkeln kring punkten (x_0, y_0), med radie $r > 0$, har ekvationen
>
> $$(x - x_0)^2 + (y - y_o)^2 = r^2.$$

Om vi utvecklar kvadraterna, får ekvationen följande form:

$$x^2 - 2x_0\,x + x_0^2 + y^2 - 2y_0\,y + y_0^2 = r^2$$

eller, omskrivet,

$$x^2 - 2x_0\,x + y^2 - 2y_0\,y = r^2 - x_0^2 - y_0^2.$$

Formen hos uttrycket är följande:

- Vänsterledet innehåller kvadrattermer x^2 och y^2 samt linjära termer Ax och By, där A och B är konstanter $(A = -2x_0,\ B = -2y_0)$. Däremot finns inga "blandade termer" med, dvs inga xy-termer.
- Högerledet är konstant C (där $C = r^2 - x_0^2 - y_0^2$).

Varje ekvation av denna form, dvs $x^2 + Ax + y^2 + By = C$ beskriver antingen en cirkel, en punkt eller ingenting, beroende på hur konstanterna $A,\ B$ och C ser ut, vilket vi ser i följande exempel.

Exempel 23 Beskriv geometriskt följande mängder:

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$
c) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6 = 0.$

a) Kvadratkomplettering ger

$$(x-1)^2 - 1^2 + (y+2)^2 - 2^2 + 1 = 0$$

d.v.s.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

vilket beskriver en cirkel med radie 2 kring punkten $(1, -2)$.

b) Motsvarande kalkyl som ovan ger

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

vilket är uppfyllt endast för punkten $(x, y) = (1, -2)$.

c) På samma vis fås, efter kvadratkomplettering, sambandet

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = -1$$

vilket är en orimlighet eftersom vänsterledet ej kan bli negativt. Det finns inga punkter som uppfyller sambandet.

□

Övningar

72. Bestäm ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(3, 4)$ och radie 5. Rita figur. En speciell punkt bör framgå direkt ur din figur. Kontrollera den i ekvationen.

73. Tolka ekvationerna

    a) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 6$ b) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = -12$.

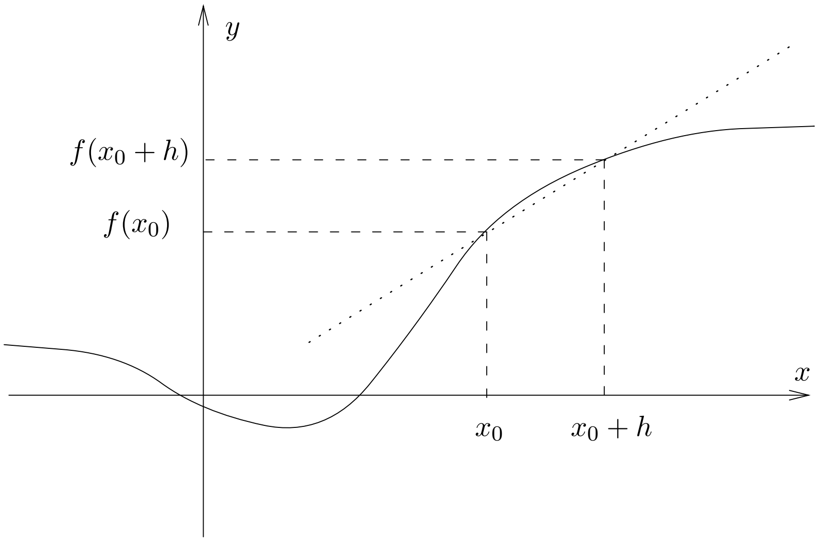
    c) Ange det tal k för vilket ekvationen $x^2 + 2x + y^2 - 6y = k$ uppfylls av en enda punkt.

74. a) Teckna villkoret för att en punkt (x, y) ska ha samma avstånd till punkten $(1, 2)$ som till punkten $(-3, 4)$. Kvadrera villkoret

    b) Kvadrera villkoret och härled en ekvation som du sedan tolkar och åskådliggör i en figur.

8 Derivator

Vi betraktar problemet att bestämma tangenten till grafen för en funktion f i en given punkt x_0.



För att finna tangenten i punkten $(x_0, f(x_0))$, approximerar vi denna med en sekant genom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x_0+h, f(x_0+h))$, där x_0+h ligger nära x_0. Riktningskoefficienten för denna sekant är

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Om vi låter h vara nära noll, kommer sekanten att vara en god approximation av tangenten. Vi får tangentens riktningskoefficient som gränsvärdet av

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

då h går mot noll (om gränsvärdet existerar). Detta gränsvärde kallas för *derivatan* av funktionen f i punkten x_0 och betecknas $f'(x_0)$.

Exempel 24 Bestäm derivatan av $f(x) = x^3$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2.$$

Då vi låter $h \to 0$ kommer detta uttryck att närma sig $3x^2$, d.v.s. $f'(x) = 3x^2$.

□

Räknelagar för derivator:

Om a och b är konstanter och f och g är deriverbara så är

$$\frac{d}{dx}\left(a\cdot f(x)+b\cdot g(x)\right) = a\cdot f'(x)+b\cdot g'(x) \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{25}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{om } \ g(x)\neq 0 \tag{26}$$

Derivata av sammansatt funktion.

Antag att $z=f(y)$ och $y=g(x)$. Om y elimineras får vi att $z=f\left(g(x)\right)=h(x)$ är en funktion av x som är sammansatt av f och g. Antag att g är deriverbar i punkten x och att f är deriverbar i punkten $y=g(x)$. Då är h deriverbar i x och det gäller att:

$$h'(x)=f'(y)\cdot g'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) \tag{27}$$

Derivator av några elementära funktioner

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{28}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{29}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x \tag{30}$$

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \tag{31}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \tag{32}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{33}$$

Exempel 25 Funktionen $h(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ kan vi se som sammansättningen av funktionerna f och g, $h(x)=f\left(g(x)\right)$, där $f(y)=\ln y$ och $g(x)=1+x^2$.

Eftersom $f'(y)=\dfrac{1}{y}$ och $g'(x)=2x$, följer då enligt räknelag (27) att

$$h'(x)=f'(y)\cdot g'(x)=\frac{1}{y}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}\ .$$

□

Övningar

75. Beräkna derivatan av

a) 7 b) x^3+5x^2+2 c) $3x^4+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ d) $\sqrt{x}$

e) $x\,e^x$ f) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$ g) $2\sin x\cos x$ h) $\dfrac{\ln|x|}{\sin x}$

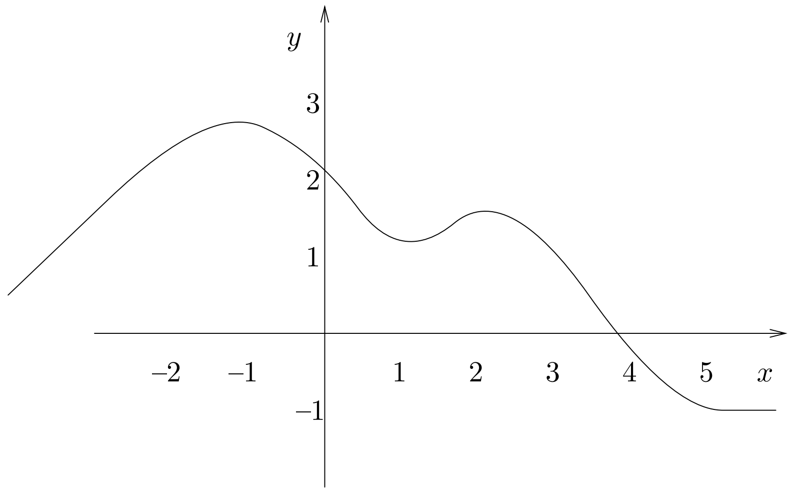
76. Derivera och förenkla så långt som möjligt:

a) $\sin(3x + \pi)$ b) $\ln |2x|$ c) $\cos^3 x$

d) $x \ln x - x$ e) $\sqrt{1 - x^2}$ f) e^{x^2+2x}

g) $e^{\frac{1}{2}\ln x}$ h) $\sqrt{x\sqrt{x}}$ i) $x^2 \sin \dfrac{1}{x}$

(*) 77. Funktionen f:s graf är ritad i nedanstående figur. Hur ser derivatans graf ut? Skissera den.



(*) 9 Binomialutveckling.

Vi har nu bl.a. tagit upp kvadreringsregeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ .$$

Det är även lätt att genom direkt uträkning visa att

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ .$$

Observera att termerna i högerledet innehåller fallande potenser av a och stigande potenser av b och att exponentsumman alltid är 3. Nu vore det trevligt om man på ett enkelt sätt kunde skriva upp en motsvarande regel för utveckling av $(a+b)^n$, där n är ett godtyckligt positivt heltal. För detta behövs dock några förberedelser.
Vi definierar $n!$ som

$$\begin{cases} n! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n \quad , \quad \text{om } n \text{ är ett positivt heltal} \\ 0! &= 1. \end{cases}$$

Talet $n!$ kallas *n-fakultet* och betyder således produkten av de n första positiva heltalen, om n är ett positivt heltal. Uttrycket ovan måste tolkas med viss försiktighet, det är inte säkert att alla talen i början av högerledet skall vara med. Exempelvis är $2! = 1\cdot 2$ och ingenting annat. En tolkning av $n!$ är antalet sätt på vilket man kan ordna n stycken objekt. Vi kan direkt observera en räknelag för fakulteter:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \tag{34}$$

då n är ett positivt tal. En av anledningarna till att låta $0! = 1$ är att då blir (34) uppfylld även för $n = 0$. Vidare definierar vi "n över k" som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Om vi stryker en massa gemensamma faktorer i täljare och nämnare får vi sambandet

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-(k-1))}{k!} .$$

Exempel 26 $$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56 \ .$$

□

En tolkning av talen $\binom{n}{k}$, som även kallas *binomialkoefficienter*, är antalet sätt på vilket man bland n stycken saker kan plocka ut k stycken (om man ej bryr sig om i vilken ordning man valt dem). Du kan gärna försöka övertyga sig om att så är fallet genom att till exempel låta $n = 3, 4$ eller 5 och låta k variera mellan 0 och n.

Exempel 27 På hur många olika sätt kan man välja ut två stycken olika heltal mellan 1 och 10?

Först väljer vi ett tal, vilket kan göras på 10 sätt. Därefter väljs det andra talet, vilket kan göras på 9 sätt. Totala antalet möjligheter blir således $10 \cdot 9$. Då har vi dock fått med samma uppsättningar dubbla gånger; vi har t.ex. fått med både $\{3, 8\}$ och $\{8, 3\}$. Om vi ej bryr oss om i vilken ordning vi valt talen, blir totala antalet möjligheter $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = \dbinom{10}{2}$.

$\square$

Om vi går tillbaka till utvecklingen av

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

så ser vi att vi ur varje parentes skall välja ut antingen ett a eller ett b. Termer av typen a^3 fås genom att välja b ur 0 stycken parenteser och detta kan göras på $\dbinom{3}{0}$ sätt. Termer av typen $a^2 b$ fås genom att välja ut b ur en av parenteserna, vilket kan göras på $\dbinom{3}{1}$ sätt och så vidare. Med detta resonemang fås att

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

På motsvarande sätt får man det allmänna *binomialteoremet*:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n. \tag{35}$$

Binomialkoefficienterna skrivs ofta upp i ett schema som kallas *Pascals triangel*.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\cdot & & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & & \cdot
\end{array}$$

Denna triangel gömmer många intressanta samband. Varje tal inne i triangeln är t.ex. summan av de två tal som står närmast ovanför, vilket gör att det är väldigt enkelt att skriva upp triangeln på en enklare form.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 . & & & & & & & & . \\
 . & & & & & & & & .
\end{array}
$$

Likaså ser man att Pascals triangel är symmetrisk, vilket resulterar i räknelagen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} . \tag{36}$$

Övningar

78. Beräkna $0!\,,\ 1!\,,\ 2!\,,\ \ldots\ ,\ 6!\,.$

79. Beräkna
    a) $\binom{7}{2}$ b) $\binom{5}{3}$ c) $\binom{5}{2}$ d) $\binom{13}{11}$ e) $\binom{1000}{998}$

80. a) Utveckla $(a+b)^3$ och $(x+y)^4$.
    b) Jämför svaren med Pascals triangel. Vad blir $(a+b)^5$? Utveckla och kontrollera.
    c) Utveckla $(2a+b)^4$ och $(2x-y)^4$.

81. Linus har råkat i penningbekymmer, hans studiemedel är nästan slut. På natten innan lördagen uppenbarar sig dock i Linus dröm sju tal mellan 1 och 35. När Linus vaknar är han övertygad om att de tal han drömt om är denna lördags lottorad. Glad i hågen rusar Linus till närmaste On-Line-inlämning och lämnar in en kupong med två identiska rader (han måste tippa minst två rader och vill inte lämna in någon rad som ej ger högsta vinsten). Hur stor är sannolikheten att Linus vinner högsta vinsten, så att han kan leva på något annat än vatten och bröd tills nästa utbetalning av studiemedel sker?

Facit

1. a) 17 b) 5/6 c) 11/7 d) 5/3
   e) 7 f) 192 g) –18 h) 0

2. a) $\dfrac{4b^5}{a}$ b) $8a^3b^6$ c) -1 d) 32

3. a) $a^2 + 2ab + b^2$ b) $a^2 - 2ab + b^2$ c) $9a^2 - 30ab + 25b^2$
   d) $a^2 - b^2$ e) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ f) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
   g) $x^3 + y^3$ h) $x^3 - y^3$

4. a) $(a - 2b)(a + 2b)$ b) $3(5 + y)(5 - y)$ c) $3x(5 - y)^2$
   d) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ e) $(4x + 3)(4x - 3)$ f) $(x - 2y)^2$
   g) $3x(x - 3)(x + 3)$

5. a) $\sqrt{5} + 2$ b) $\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

6. a) 2 b) $4rs$ c) $\dfrac{x+3}{5}$ d) $\dfrac{a}{a+b}$ $(a \neq b)$
   e) $\dfrac{a+b}{a-b}$ $(a, b \neq 0\ ,\ a \neq -b)$ f) 3

7. $y = \dfrac{ab}{a+b}$ och av detta kan vi se att $y < a$ och $y < b$.

8. a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
   b) $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab - 6ac + 12bc$
   c) $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$

9. a) $x^6 - y^6$ b) $x^7 + y^7$

10. a) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$ b) $-5(5x - 2y)^2$
    c) $(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2)$ d) $(x - 1)^2(x + 1)^2$
    e) $(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

11. a) $\dfrac{b^2}{a^2}$ $(b \neq 0\ ,\ a \neq -b)$ b) $\dfrac{a+2}{a}$ $(a \neq -1,\ -2,\ -3)$
    c) 34 d) $\dfrac{x-2}{1-x}$ $(x \neq -1, 0, 2)$

13. a) $x - 1 + \dfrac{5}{x-2}$ b) $x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$ c) $x^2 + 4x - 1 - \dfrac{20}{x-2}$

14. a) Kvot $x^3 + 2x^2 + 5x + 5$ och rest 13
    b) Kvot $x^3 + x^2 + 2x - 3$ och rest 0
    c) Kvot $x^3 - 3x^2 + 10x - 35$ och rest 108
    d) $P(2) = 13,\ P(1) = 0$ och $P(-3) = 108$.
    e) Utgå från sambandet (6) på sidan 4, multiplicera båda led med nämnaren $q(x) = x - a$ och sätt in ett listigt valt x-värde.

15. a) 0 b) $2^{100} - 2^{11} + 1$ c) 0.

16. a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 9$ d) $x = -2$

17. a) $x = 0$ eller $x = 16/15$ b) $x = 3$ eller $x = -11$
c) $x = -4$ eller $x = -3$ d) $x = 3/2$ eller $x = 3/7$
e) $x = -2$ eller $x = 14$ f) $x = -1$

18. a) $x = -4$ eller $x = 3$ b) $x = a$ eller $x = b$ c) $x = -2 \pm \sqrt{5}$

19. a) $x = -1$ eller $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ b) $x = 1,\ -1$ eller -2 c) $x = 1$

20. a) $(x + 4)(x - 1)$ b) $2(1 - x)(2x + 3)$

21. $x^2 - 5x + 6 = 0$ är väl den enklaste

22. a) $-p$ b) q

23. a) $x = \pm 2$ eller $x = \pm 1/2$ b) $x = 2,\ 1$ eller -3
c) $x = 1$ d) $x = -4$
e) $x = 2 \pm \sqrt{3}$ eller $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ f) $x = 1,\ 2,\ -3$ eller -4

24. $a = 24$ ger $x = 1/3$, $a = -4$ ger $x = 5$

25. a) 11 b) 43 c) $8/9$ d) $8/9$

26. a) $x = 2$ eller $x = 8$ b) $x = 5$ eller $x = -1$
c) $-1 < x < 7$ d) $x \leq -6$ eller $x \geq -2$

27. a) $x = -1$ b) $x = 3$ eller $x = 7$
c) alla $x \geq 0$ d) lösning saknas

28. a) $x = -4$ b) $x = -6$ eller $x = -9/2$ c) $x = 1,\ 4,\ 7$ eller $x = -2$

29. a) $x = 0$ eller $x = -4/3$ b) $-2 < x < -\sqrt{2}$ eller $\sqrt{2} < x < 2$
c) $x = -1$ d) $x = \pm 2$ eller $x = \pm 4$
e) $x = 6$ eller $x = -4$

30. a) $x < -12$ b) $x \geq 2$ eller $x \leq -2$
c) $-5 < x \leq -1/2$ eller $x \geq 3$ d) $x \neq 5$
e) $0 < x < 1$ eller $x > 2$ f) $-2 < x < 1$ eller $1 < x < 4$

31. a) $-1 < x < 1$ eller $2 < x < 4$ b) $-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2}$ eller $\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$
c) $x < -1/2$ eller $0 < x < 1$ d) $-1/3 \leq x < 1/2$ eller $1 \leq x < 2$

32. Låt din miniräknare rita kurvorna, och titta om det ser likadant ut som i dina figurer

33. a) 2 b) 3 c) 2 d) 27648 e) 10
f) 8 g) $1/2$ h) $2^x \cdot 3^y$

34. a) 1 b) 3 c) $1/2$ d) 3 e) $-\pi$

35. a) $2a$ b) $a+b$ c) $3a$

36. $\ln\left(e^c \cdot x^a \cdot y^b\right)$

37. a) $x = 10^{-1} = 1/10$ b) $x = e^{2/3}$ c) $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} = {}^2\log 3$

38. $t = \dfrac{\ln 2}{3}$.

39. a) $x = 3$ b) $x = 0$ eller $x = 2$ c) $x = -2$

40. a) $4/3$ b) 2 c) 2 d) 0

41. a) $3^{2/9}$ (ty $2^{1/3} = 8^{1/9}$ och $3^{2/9} = 9^{1/9}$) b) $1000^{\left(1000^{1000}\right)}$

42. a) $x = 4900$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ eller $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} = {}^3\log 2$
d) $x = \ln 3$ e) $x = \ln 2$ f) $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 5} = {}^5\log 3$

43. a) $10 \lg 2 \approx 3$ dB
b) Intensiteten måste minskas till en hundradel av ursprungsvärdet

44. a) 0 b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) π d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{\pi}{6}$ f) $\dfrac{\pi}{3}$

45. a) $60°$ b) $120°$ c) $150°$ d) $-45°$ e) $270°$ f) $540°$

46. Den vänstra figuren har kateterna $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
Den högra figuren har kateterna $\dfrac{1}{2}$ respektive $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

47. a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

48. a) $-\sin v$ b) $-\cos v$ c) $\sin v$ d) $\cos v$ e) $\sin v$

49. a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

50. Detta följer av Pythagoras' sats

51. 1.

52. a) 0 b) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\pm\dfrac{\sqrt{8}}{3}$
d) Detta går ej, ty $\cos x = \sqrt{2}$ saknar lösning

53. a) $\sin u = b$, $\cos u = a$, $\sin v = a$, $\cos v = b$
b) $\sin u = \cos v$ och $\cos u = \sin v$
c) $u = \dfrac{\pi}{2} - v$ och $v = \dfrac{\pi}{2} - u$
d) $\cos v = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$ och $\sin v = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$

54. a) $u = v + n \cdot 2\pi$ eller $u = -v + n \cdot 2\pi$ (där n är ett heltal)
b) $u = v + n \cdot 2\pi$ eller $u = \pi - v + n \cdot 2\pi$ (där n är ett heltal)
c) samma svar som i a)
d) samma svar som i b)

55. a) $v = n\pi$ b) $v = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$
c) $v = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ d) $v = n \cdot 2\pi$

e) $v = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ eller $v = \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

f) $v = \dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ eller $v = -\dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

g) $v = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ eller $v = \dfrac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

h) $v = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ eller $v = -\dfrac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

56. a) $x = n\pi$ eller $x = \dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{2\pi}{3}$ b) $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \pi + n \cdot 2\pi$

57. a) Vad händer om man roterar vinkeln ett halvt varv?
b) Vad händer om man roterar vinkeln v medurs istället för moturs?

58. a) 0 b) 0 c) 1 d) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) existerar ej

59. a) $x = a \sin\alpha$ b) $x = a \tan\alpha$ c) $x = a/\tan\alpha$

d) $x = a\cos\alpha$ e) $x = a/\cos\alpha$ f) $x = a/\sin\alpha$.

61. $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

62. $\dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{15}}{12}$

63. a) Sätt vänsterledet på gemensam nämnare och använd trigonometriska ettan
b) Använd definitionen av $\tan(v + \pi)$ och resultatet i uppgift 48

64. a) $y - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ b) $y - 2 = -\sqrt{3}(x-1)$
c) $y - 2 = \sqrt{3}(x-1)$ d) $y - 2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$

65. a) $k = 1$, $v = \pi/4$ b) $k = -1$, $v = 3\pi/4$ c) $k = -1$, $v = 3\pi/4$
d) $k = 1/\sqrt{3}$, $v = \pi/6$ e) $k = -\sqrt{3}$, $v = 2\pi/3$

66. Linjerna skär x- och y-axlarna i punkterna
a) $(-3, 0)$ och $(0, 3)$ b) $(2, 0)$ och $(0, 2)$ c) $(-1/2, 0)$ och $(0, -1/2)$
d) $(17, 0)$ och $(0, -17/\sqrt{3})$ e) $(-1/\sqrt{3}, 0)$ och $(0, -1)$

67. $y = 5 - 3x$ skär koordinataxlarna i punkterna $(5/2, 0)$ och $(0, 5)$

68. Bestäm linjen som innehåller de båda första punkterna och kontrollera att den tredje ligger på linjen.

69. a) Skärningspunkt $(5/2, -1/2)$, skärningsvinkel $3\pi/4 - \pi/4 = \pi/2$
b) Skärningspunkt $(1/(1+\sqrt{3}), 1/(1+\sqrt{3}))$, skärningsvinkel $5\pi/6 - \pi/4 = 7\pi/12$
c) Linjerna har inga gemensamma punkter (de är parallella)
d) Linjerna sammanfaller (ekvationerna uttrycker samma linje), skärningsvinkel 0

70. $y = 2x - 3/2$

71. a) $6/\sqrt{13}$ b) $6/\sqrt{13}$ c) $|p|/\sqrt{13}$

72. $(x - 3^2 + (y-4)^2 = 25$

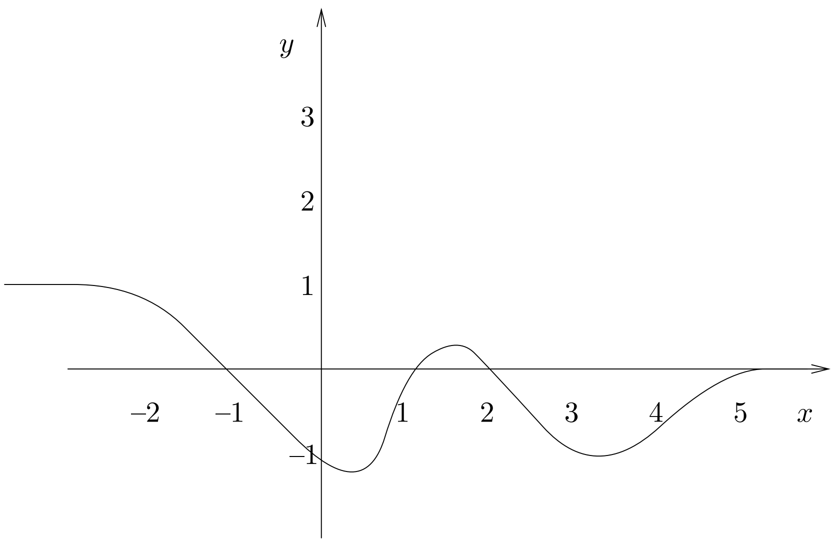
73. a) En cirkel med radie 4 kring punkten $(-1, 3)$.
b) Det finns inga punkter (x, y) som uppfyller ekvationen.
c) $k = -10$

74. a) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2}$
b) $2x - y + 5 = 0$, mittpunktsnormalen till sträckan mellan $(1, 2)$ och $(-3, 4)$.

75. a) 0 b) $3x^2 + 10x$ c) $12x^3 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$ d) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e) $(x+1)e^x$
f) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ g) $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$ h) $\dfrac{\frac{\sin x}{x} - \cos x \ln|x|}{\sin^2 x}$

76. a) $-3\cos 3x$ b) $\dfrac{1}{x}$ c) $-3\cos^2 x \sin x$ d) $\ln x$ e) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $(2x+2)e^{x^2+2x}$ g) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ h) $\dfrac{3}{4}x^{-1/4}$ i) $2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$

77.



78. 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720.

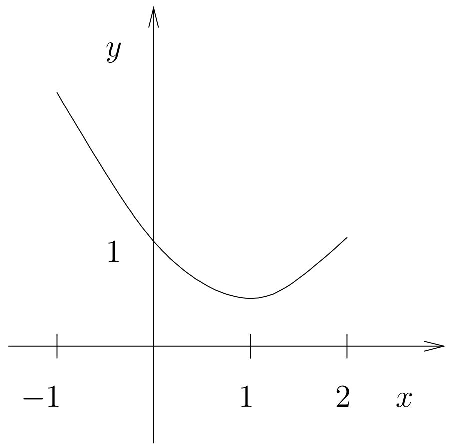
79. a) 21 b) 10 c) 10 d) $\binom{13}{2} = 78$ e) $\binom{1000}{2} = 499500$

80. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ respektive $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
b) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
c) $16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$ respektive $16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$

81. Antal olika lottorader är $\binom{35}{7}$, så chansen är $\frac{1}{\binom{35}{7}} = \frac{1}{6724520}$

Svar till diagnostiskt prov

1. $x = -\dfrac{5}{2}$
2. $\dfrac{5}{12}$
3. $\dfrac{a-b}{a+b}$
4. $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ eller $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$
5. $x = -\dfrac{1}{2}$ eller $x = -\dfrac{5}{2}$
6. $-3 < x < 3$
7. $\dfrac{1}{a^7}$
8. Funktionens största värde är $f(-1) = \dfrac{5}{2}$ och minsta värdet är $f(1) = \dfrac{1}{2}$.



9. Figur E
10. $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}\, e^{2x}$
11. 1
12. $\cos v = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
13. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$ för något heltal n